Санкт-Петербургское государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Академия промышленных технологий»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для специальности
среднего профессионального образования

08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения

Санкт-Петербург
2023

Методические рекомендации по выполнению практических и лабораторных работ предназначены для использования обучающимися при выполнении заданий по практическим и лабораторным работам по учебной дисциплине ЕН.01 Математика по специальности среднего профессионального образования 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения.

В методических рекомендациях предлагаются к выполнению практические работы, предусмотренные рабочей программой учебной дисциплины, даны рекомендации по их выполнению.

Организация-разработчик:
Санкт-Петербургское государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Академия промышленных технологий» (СПб ГБПОУ «АПТ»)

Разработчик:
Е.В. Никитина - преподаватель СПб ГБПОУ «АПТ»

Методические рекомендации рассмотрены и одобрены на заседании учебной цикловой комиссии естественнонаучных и общеобразовательных дисциплин.

Протокол №10 от 06.06.2023

Председатель УЦК Е.А. Рахаева

Методические рекомендации рассмотрены и одобрены на заседании Методического совета СПб ГБПОУ «АПТ» и рекомендованы к использованию в учебном процессе.

Протокол №1 от 28 августа 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ разработаны согласно рабочей программе учебной дисциплины ЕН.01 Математика и требованиям к результатам обучения Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования (далее – ФГОС СПО) по специальности 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения.

Методические указания по выполнению практических работ направлены на овладение обучающимися следующих результатов:

Знания:
- значение математики в профессиональной деятельности
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, дискретной математики теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики
-основы интегрального и дифференциального исчисления

Умения:
- использовать методы линейной алгебры
- решать основные прикладные задачи

Общие компетенции

ОК 01	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 02	Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности
ОК 03	Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие
ОК 04	Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами
ОК 05	Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста
ОК 06	Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей
ОК 09	Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности
ОК 11	Использовать знания по финансовой грамотности, планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере

Профессиональные компетенции

ПК 1.1.	Конструировать элементы систем газораспределения и газопотребления
ПК 1.2.	Выполнять расчет систем газораспределения и газопотребления
ПК 1.3.	Составлять спецификацию материалов и оборудования на системы газораспределения и газопотребления
ПК 2.1.	Организовывать и выполнять подготовку систем и объектов к строительству и монтажу
ПК 2.2.	Организовывать и выполнять работы по строительству и монтажу систем газораспределения и газопотребления в соответствии с правилами и нормами по охране труда, требованиями пожарной безопасности и охраны окружающей среды

ПК 2.3. Организовывать и выполнять производственный контроль качества строительно-монтажных работ
ПК 2.4. Выполнять пусконаладочные работы систем газораспределения и газопотребления
ПК 2.5. Руководство другими работниками в рамках подразделения при выполнении работ по строительству и монтажу систем газораспределения и газопотребления
ПК 3.1. Осуществлять контроль и диагностику параметров эксплуатационной пригодности систем газораспределения и газопотребления
ПК 3.2. Осуществлять планирование работ, связанных с эксплуатацией и ремонтом систем газораспределения и газопотребления
ПК 3.3. Организовывать производство работ по эксплуатации и ремонту систем газораспределения и газопотребления
ПК 3.4. Осуществлять надзор и контроль за ремонтом и его качеством
ПК 3.5. Осуществлять руководство другими работниками в рамках подразделения при выполнении работ по эксплуатации систем газораспределения и газопотребления
ПК 3.6. Анализировать и контролировать процесс подачи газа низкого давления и соблюдения правил его потребления в системах газораспределения и газопотребления

Практические занятия проводятся после изучения соответствующих разделов и тем дисциплины. Выполнение обучающимися практических заданий позволяет им понять, где и когда изучаемые теоретические положения и практические умения могут быть использованы в будущей практической деятельности.

Целью практических занятий является закрепление теоретических знаний и приобретение практических умений и навыков.

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ И МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К НИМ

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1-2

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы

по теме 1.1. «***Действия с матрицами»***

по теме 1.2. «***Умножение матриц»***

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. Матрицы, действия над матрицами.

Определение. **Матрицей** размера **m×n** называется прямоугольная таблица произвольных элементов a_{ij}, которая содержит m строк и n столбцов и обозначается следующим образом: $A=(a_{ij})$

П р и м е р. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица размера 2×3, элементами которой являются числа.

Если $m=n$, то матрица в этом случае называется **квадратной**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Элементы a_{11}; a_{22}… a_{mn} образуют главную диагональ матрицы. Квадратная матрица, в которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю называется **диагональной**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определение. **Единичной** называется диагональная матрица, в которой все элементы главной диагонали будут равны единице. Единичную матрицу принято обозначать буквой *E*.

П р и м е р. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица. E= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$- единичная матрица

Матрица размера $1\times n$ называется **матрицей-строкой**, а матрица, размера $m\times1$ называется **матрицей-столбцом**.

$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$-матрица –столбец $\qquad$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$- матрица-строка

ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

1. Сумма матриц

Матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(в_{ij})$ можно складывать в том случае, если они будут иметь **одинаковый размер.**

Определение. **Суммой** двух матриц *A* и *B*, размера $m\times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой определяются следующим образом: $C_{ij=}a_{ij}+в_{ij}$,

П р и м е р. $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$ Тогда C=A+B=$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$

2. Определители и их свойства.

Определение. **Определителем второго порядка** называется квадратная таблица некоторых элементов$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ которой в соответствие однозначно ставиться выражение (*ad - вс*).

Если- *a*, *в*, *с* и *d* –произвольные числа, то определитель в конечном итоге будет выражаться также числом. Для однозначного определения местоположения элементов определителя вводится их двойная индексация. В общем виде элемент определителя, который стоит на пересечении *i*-ой строки и *j*-го столбца будет выражаться как a_{ij}.

Обозначается определитель символом $\Delta = |\boldsymbol{a_{ij}}|$ -символическое выражение определителя в общем виде.

$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ – вычислительная схема определителя второго порядка в общем виде.

П р и м е р. Вычислить определитель $\Delta=\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$

Решение:

$\Delta=\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}= 6\cdot(-2)-(-5)\cdot 1=-7$

Ответ: -7

Определение. **Определителем третьего порядка** называется квадратная таблица некоторых элементов вида

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ которой в соответствие однозначно ставится выражение

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

П р и м е р. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение:

В данном примере числовые значения элементов следующие: a_{11}=1; a_{12}=1; a_{13}=-1; a_{21}=2; a_{22}=1; a_{23}=-2; a_{31}=-1; a_{32}=1; a_{33}=2. Подставляя эти значения в выражение определителя через его элементы, получим:

Δ=1·1·2+1·(-2)·(-1)+2·1·(-1)-(-1)·1·(-1)-2·1·2-1·(-2)·1=2+2-2-1-4+2=-1

Определение.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} в определителе Δ называется определитель, который получим после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца в определителе Δ.

П р и м е р. Найти все миноры определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение:

M_{11}=1 (вычеркиваем первую строку и первый столбец).

Аналогично M_{12}=-3, M_{21}=2, M_{22}=6.

П р и м е р.

Найти миноры M_{11}; M_{21}; M_{32} и M_{13} в определителе $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Решение:

$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ =6-0=6

$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$= 2-4=-2

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} в определителеΔ, называется минор этого элемента M_{ij} , взятый с соответствующим знаком, который определяется =В противном случае алгебраическое дополнение и минор элемента a_{ij} будут отличаться знаком.

П р и м е р.

Найти все алгебраические дополнения элементов определителя

$\Delta= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

Решение:

$M_{11} = A_{11} = 3 \quad M_{12} = -A_{11} = -2 \quad M_{21}{=}{-}A_{21} = -4 \quad M_{22}{=}A_{22} = 1$

П р и м е р.

Найти алгебраические дополнения элементов первой строки определителя и первого столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$ $\qquad A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3;$ $\qquad A_{21} = -M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3;$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

П р и м е р. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

с использованием различных его свойств.

Решение:

1. Вычислим определитель Δ, используя его определение:

Δ=1·(-2)·(-3)+2·3·(-2)+1·(-1)·1-(-2)·(-2)·1-(-1)·2·(-3)-1·3·1=-20.

2. Вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки:

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$;

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 18 - 5 = -20;$$

3. Вычислим определитель, разложив его по элементам второго столбца.:

$\Delta = a_{12}A_{12} + {}_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$;

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 2 - 4 = -20;$$

4. Вычислим определитель Δ, предварительно преобразовав его с использованием седьмого свойства.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot 1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

К определителю $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$,который мы получили, заменив в исходном определителе вторую строку суммой элементов первой и второй строки, применим пятое свойство, раскладывая его по элементам второй строки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -20.$$

Ответ: Δ=-20.

Произведение матриц на число

Определение. **Произведением** матрицы A на число κ называется матрица $B=\kappa A$ такая, что $B=\|\kappa a_{ij}\|$, т.е. чтобы умножить матрицу на число надо все ее элементы умножить на это число.

П р и м е р. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ Найти матрицу $B=-5A$.

Решение:

$$B=\begin{pmatrix} -15 & 10 \\ -20 & 35 \end{pmatrix}.$$

Следствие. Если все элементы матрицы имеют общий множитель, то только в этом случае его можно выносить за знак матрицы.

П р и м е р. $A=\begin{pmatrix} -15 & 10 \\ -20 & 35 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

В случае же определителя - за знак определителя можно было выносить общий множитель элементов любой строки (столбца).

Произведение матриц

Матрицу A, слева, можно умножать на матрицу B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Определение. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m\times k$ на матрицу $B=(в_{st})$ размера $k\times n$ называется матрица $C=AB=(c_{it})$ размера $m\times n$ с элементами $c_{it} = a_{i1}в_{1t}+a_{i2}в_{2t}+\cdots+a_{ik}в_{kt}$.

Таким образом, для определения элемента c_{it} матрицы $C=AB$, необходимо i-ю строку матрицы A поэлементно умножить на t-ый столбец матрицы B.

П р и м е р. Найти произведение матриц $C = AB$, если:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Матрица A имеет размер 2×4, а матрица B − 4×3. Поскольку число столбцов матрицы A равняется числу строк матрицы B, следовательно, матрицу A можно слева умножить на матрицу B. Пусть $AB=C$. Тогда:

$$c_{11}=a_{11}в_{11}+a_{12}в_{21}+a_{13}в_{31}+a_{14}в_{41}=1(-1)+(-1)4+2\cdot 2+1(-5)=-6;$$
$$c_{12}=a_{11}в_{12}+a_{12}в_{22}+a_{13}в_{32}+a_{14}в_{42}=1\cdot 2-1\cdot 0+2\cdot(-4)+1\cdot 1=-5;$$

$$c_{13}=a_{11}в_{13}+a_{12}в_{23}+a_{13}в_{33}+a_{14}в_{43}=1\cdot 3-1\cdot 5+2\cdot 3+1\cdot 0=4;$$

$$c_{21}=a_{21}в_{11}+a_{22}в_{21}+a_{23}в_{31}+a_{24}в_{41}=0(-1)+3\cdot 4+4\cdot 2-2(-5)=30;$$

$$c_{22}=a_{21}в_{12}+a_{22}в_{22}+a_{23}в_{32}+a_{24}в_{42}=0\cdot 2+3\cdot 0+4\cdot(-4)-2\cdot 1=-18;$$

$$c_{23}=a_{21}в_{13}+a_{22}в_{23}+a_{23}в_{33}+a_{24}в_{43}=0\cdot 3+3\cdot 5+4\cdot 3-2\cdot 0=27.$$

Таким образом, $c = AB = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 4 \\ 30 & -18 & 27 \end{pmatrix}$

Действия с матрицами подчиняются следующим свойствам:

A + B = B + A

K(A + B) = KA + KB (К - действительное число)

A(B + C) = AB + AC

A(BC) = (AB)C

Примечание. Переместительный (коммутативный) закон для произведения матриц в общем случае не выполняется (если *AB* = *C*, то произведение *BA* может вообще не существовать).

Матрицы, для которых выполняется свойство *AB*=*BA*, называются **коммутативными**.

Определение. Матрица A^T = $\|a_i\|$ называется **транспонированной** по отношению к матрице A=$\|a_i\|$. Если матрица *A* имеет размер $m\times n$, то размер матрицы A^T будет $n\times m$.

П р и м е р.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Имеют место следующие равенства:

$(A^T)^T = A;$

$(A+B)^T = A^T + B^T;$

$(KA)^T = KA^T;$

$(AB)^T = A^T B^T;$

$\Delta A = \Delta A^T;$

$\Delta(AB) = \Delta A \cdot \Delta B.$

Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется **обратной** матрице A, если имеет место соотношение: $A^{-1}A = A\,A^{-1} = E$.

Если матрица имеет обратную матрицу A^{-1}, то она называется **обратимой**.

Квадратная матрица $A=(a_{ij})$, определитель ΔA которой отличный от нуля, является обратимой.

Обратная матрица в этом случае выражается соотношением: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\,\|A_{ji}\|$, где A_{ji}– алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \dfrac{1}{A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

П р и м е р. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице A. Полученный результат проверить, определяя произведение $A^{-1}A = E$.

Решение:

Найдем определитель матрицы A.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -9 \\ 0 & -3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 50.$$

Поскольку $\Delta A \neq 0$, матрица А является обратимой, т.е. существует обратная матрица A^{-1}.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 12$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 26$; $A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$;

$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 11$; $A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5$; $A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 9$;

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

Таким образом $A^{-1}=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}10 & 5 & -5\\ 12 & 11 & 9\\ 26 & 3 & 7\end{pmatrix}$ – матрица, обратная к матрице A. Найдем произведение $A^{-1}A$.

$$\frac{1}{50}\begin{pmatrix}10 & 5 & -5\\ 12 & 11 & 9\\ 26 & 3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & -3\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}50 & 0 & 0\\ 0 & 50 & 0\\ 0 & 0 & 50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E\,.$$

Поскольку $A^{-1}A=E$, следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена правильно.

Ответ: $A^{-1}=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}10 & 5 & -5\\ 12 & 11 & 9\\ 26 & 3 & 7\end{pmatrix}$

Составить матрицы (по вариантам). Найти их сумму и произведение. Самостоятельно выбрать всевозможные варианты.

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
1.	5	2	1	5	-3	0	1	2	-1	4	0	1	1	0	1	9
2.	2	-8	2	8	-2	0	1	3	-2	5	1	2	2	-3	2	6
3.	-3	-6	3	2	2	0	2	6	-6	3	2	5	3	-1	5	8
4.	0	1	8	9	-3	5	0	5	-3	2	3	2	5	-2	2	5
5.	1	0	5	3	4	-6	2	4	-4	1	5	5	6	0	3	6
6.	4	-2	2	4	6	0	3	8	-5	4	7	2	3	-1	6	7
7.	3	5	-7	0	-1	3	4	1	-5	5	1	4	4	0	9	6
8.	-4	3	8	0	2	-5	6	2	-5	6	2	3	1	0	5	4
9.	-1	1	-1	5	3	0	1	3	6	2	4	8	2	-1	4	3
10	-2	4	-2	7	6	0	2	5	2	3	6	3	8	-5	1	5
11	3	8	-3	1	-2	0	3	7	7	7	8	4	2	-1	2	7
12	7	3	1	-3	0	6	1	1	1	0	2	1	5	-3	3	8
13	5	-7	2	-2	0	4	2	6	3	-4	5	6	7	-1	5	5
14	4	0	3	8	-2	5	3	3	0	-2	4	2	4	0	3	1
15	3	-1	-7	5	0	2	5	9	4	-3	6	3	1	-4	7	2
16	2	-1	-2	4	6	0	4	4	2	-2	9	1	2	8	4	9
17	1	2	0	6	-4	3	3	0	4	-1	0	2	5	4	1	4
18	0	4	0	7	-2	-1	5	4	6	-2	1	0	8	6	2	5
19	0	3	7	-2	-1	-2	6	5	0	3	4	1	7	3	5	3
20	-3	7	-3	4	0	4	7	2	0	1	2	1	4	5	6	2

A=$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$

E= $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}$ D=$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ F =$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$

$$K^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \qquad L^*=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} \qquad N^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad U=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad Q^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \quad G^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1. «***Решение систем уравнения метод Крамера***»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин.

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Пусть имеется система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными. Ее решение по формулам Крамера определяется следующим образом $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ где Δ - определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, а Δ_i - определитель, который отличается от определителя Δ тем, что в нем столбец коэффициентов при переменной x_i заменяется столбцом свободных членов. Рассмотрим возможные варианты решений системы линейных уравнений по формулам Крамера.

а) Если определитель $\Delta \neq 0$, система линейных уравнений будет совместной и определенной, т. е. имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера.

П р и м е р. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение:

Вычисляем определители Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -15 .$$

Поскольку Δ=-15≠0, система линейных уравнений имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -15 ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 15 ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -30 .$$

Находим решение системы.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{15}{-15} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-30}{-15} = 2 .$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$.

б) Если определительΔ будет равен нулю, а хотя бы один из определителей $\Delta_i \neq 0$, то в этом случае система будет несовместной, т. е. не имеет решения.

Пример. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение:

Вычисляем определителиΔ и Δ_i:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$ (этот результат можно было записать без вычислений, т. к. в определителе одинаковые первый и третий столбец.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 9.$$

Поскольку Δ=0, а Δ_i≠0, следовательно, система не имеет решения.

Ответ. Решения система не имеет.

в) Если определительΔ и все определители Δ_i будут равны нулю, то система, если она будет совместной, имеет множество решений.

П р и м е р. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение:

Вычисляем определителиΔ и Δ_i:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$, т.к. первый и третий столбец в определителе одинаковые.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку определителиΔ и Δ_i равны нулю, то система линейных уравнений будет неопределенной (в случае ее совместности). В определителеΔ находим минор второго порядка, который будет отличный от нуля. Таким, например, будет минор $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

Запишем систему двух линейных уравнений в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - x_3; \\ -x_1 + 2x_2 = -5 + x_3. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 - x_3 & 1 \\ -5 + x_3 & 2 \end{vmatrix} = 2(2 - x_3) - (-5 + x_3) = 9 - 3x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 - x_3 \\ -1 & -5 + x_3 \end{vmatrix} = (-5 + x_3) + (2 - x_3) = -3.$$

Найдем решение системы двух линейных уравнений с переменными x_1 и x_2.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9 - 3x_3}{3} = 3 - x_3; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Решение системы линейных уравнений, которое содержит свободные переменные, называется **общим решением**. Таким образом, x_1=3-x_3; x_2= -1 – общее решение системы линейных уравнений. Придавая свободным переменным произвольные значения, мы будем получать различные частные решения исходной системы. Например, при x_3 = 1, частное решение будет следующим: x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = 1; при x_3 = 2, частное решение будет таким: x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2. Таким образом, существует множество частных решений исходной системы.

Исходная система линейных уравнений будет иметь следующее базисное решение: x_1 = 3; x_2 = -1; x_3 = 0. Проверка показывает, что это решение удовлетворяет всем трем уравнениям исходной системы, т. е. является ее решением.

Ответ: Система имеет множество решений.

Решение однородных систем линейных уравнений

Определение. Система линейных уравнений называется **однородной** если свободные члены этой системы будут все равны нулю.

Однородная система линейных уравнений всегда будет совместной, т. к. она имеет нулевое решение.

а) Решение однородной системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными

Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение системы определяется следующими соотношениями:

$$x_1 = t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \qquad x_2 = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \qquad x_3 = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

где t –произвольное число.

П р и м е р. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

$$x_1 = t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -t; \quad x_2 = t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4t; \quad x_3 = t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5t\,.$$

Пусть $t = 1$, тогда $x_1 = -1$; $x_2 = -4$; $x_3 = 5$.

Ответ: Система неопределенная. Одно из частных решений: $x_1 = -1$; $x_2 = -4$; $x_3 = 5$.

б) Решение однородной системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными
Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

Данная система будет иметь ненулевые решения лишь в том случае, когда определитель системы будет равен нулю. Отбрасывая одно из уравнений, мы получим однородную систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными, методика решения которой уже разобрана ранее.

П р и м е р. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Находим определительΔ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0\,.$$

Поскольку определительΔ отличный от нуля, система имеет нулевое решение.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$.

П р и м е р. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Находим определительΔ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

Поскольку Δ=0, то, следовательно, система имеет ненулевые решения. Отбрасывая третье уравнение, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем решение системы, используя методику решения однородной системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$x_1 = t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2t;\ \mathrm{x}_2 = -t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -t;\ \ x_3 = t\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -t\,;$$

При t=1, получим решение: x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = -1.

Проверка показывает, что это решение удовлетворяет отброшенное третье уравнение и является решением исходной системы.

Ответ: Множество решений. Одно из частных решений: x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = -1.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ 3x + 2y - 3z = 3 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}.$$

Вариант 2

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y - z = 6 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} -5x + 4y + 5z = -6 \\ -4x + 6y + 3z = -3 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases}$$

Вариант 4
Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 2x+3y+z=7 \\ x+y=4 \\ 2x+y+z=5 \end{cases}$$

Вариант 5
Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 5x+8y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$$

Вариант 6
Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 2x-y+3z=-3 \\ -x-y+z=-2 \\ 3x+y-2z=6 \end{cases}$$

Вариант 7
Решить методом Крамера

$$\begin{cases} x+3y+4z=8 \\ 2x-y+6z=7 \\ 4x+2y-z=5 \end{cases}$$

Вариант 8
Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 2x+6y+4z=4 \\ 3x-2y+z=-6 \\ 2x-z=6 \end{cases}$$

Вариант 9
Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 3x-8y-3z=4 \\ 2x+3y+z=7 \\ -x+3y+2z=5 \end{cases}$$

Вариант 10
Решить методом Крамера

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x-y+2z=-2 \\ 4x+y+4z=2 \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

2.0 Критерии оценки:

Процент	Качественная оценка уровня подготовки

результативности (правильных ответов)	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение
Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.
2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:
Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1. «***Метод обратной матрицы»***
2.4. Время выполнения:
Выполнение _1_час _30_мин;

Решение систем линейных уравнений матричным способом

Пусть имеется система линейных уравнений:

Исходную систему линейных уравнений можно записать следующим образом: *AX*=*B*; отсюда матричное решение будет иметь вид: $X=A^{-1}B$.

Матричным способом можно решать систему линейных уравнений лишь в том случае, когда матрица из коэффициентов при неизвестных будет обратимой.

П р и м е р. Решить матричным способом систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

Находим определительΔ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, следовательно, матрица из коэффициентов при неизвестных будет обратимой и, следовательно, систему линейных уравнений можно решить матричным способом.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 2\end{pmatrix}.$$

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-4;\quad \mathrm{A}_{13}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0;\quad \mathrm{A}_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-4;\quad \mathrm{A}_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-4.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -4 & 0 & -4\\ 2 & -2 & -4\end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы линейных уравнений:

$$X=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -4 & 0 & -4\\ 2 & -2 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом $X=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$ поскольку матрица $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ получим следующее решение: x_1 = 1; x_2 = 3; x_3 = 0.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1
Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases}x-2y+4z=4\\ 3x+2y-3z=3.\\ x+2y-z=-3\end{cases}$$

Вариант 2
Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases}2x+3y+z=5\\ x+2y-z=6\\ 3x+y+2z=3\end{cases}$$

Вариант 3

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} -5x+4y+5z=-6 \\ -4x+6y+3z=-3 \\ 2x-y-z=4 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=7 \\ x+y=4 \\ 2x+y+z=5 \end{cases}$$

Вариант 5

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x+8y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$$

Вариант 6

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=-3 \\ -x-y+z=-2 \\ 3x+y-2z=6 \end{cases}$$

Вариант 7

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x+3y+4z=8 \\ 2x-y+6z=7 \\ 4x+2y-z=5 \end{cases}$$

Вариант 8

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x+6y+4z=4 \\ 3x-2y+z=-6 \\ 2x-z=6 \end{cases}$$

Вариант 9

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x-8y-3z=4 \\ 2x+3y+z=7 \\ -x+3y+2z=5 \end{cases}$$

Вариант 10

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x-y+2z=-2 \\ 4x+y+4z=2 \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1. «**Решение системы методом Гаусса»**

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

Вариант 1

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} x-2y+4z=4 \\ 3x+2y-3z=3. \\ x+2y-z=-3 \end{cases}$$

Вариант 2

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=5 \\ x+2y-z=6 \\ 3x+y+2z=3 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} -5x+4y+5z=-6 \\ -4x+6y+3z=-3 \\ 2x-y-z=4 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=7 \\ x+y=4 \\ 2x+y+z=5 \end{cases}$$

Вариант 5

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

Вариант 6

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -3 \\ -x - y + z = -2 \\ 3x + y - 2z = 6 \end{cases}$$

Вариант 7

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 2x - y + 6z = 7 \\ 4x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

Вариант 8

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 4 \\ 3x - 2y + z = -6 \\ 2x - z = 6 \end{cases}$$

Вариант 9

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x - 8y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ -x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Вариант 10

Решить методом Гаусса

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 4x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:
Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1. «***Предел функции в точке»***

2.4. Время выполнения:
Выполнение _1_час _30_мин;

Определить точки разрыва функции и исследовать их характер.

а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.   б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\le 1,\\ 2^x, & x>1.\end{cases}$

Решение.

а) Функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ не определена в точке $x=1$, следовательно, она не является непрерывной в этой точке. Так как

$$\lim_{x-1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2,$$

то $x=1$ - точка устранимого разрыва первого рода. Данную функцию можно доопределить по непрерывности при $x=1$, взяв за значение функции в этой точке величину односторонних пределов:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{если } x\ne 1\\ 2, & \text{если } x=1.\end{cases}$$

б) Функция $y=\dfrac{1}{x+1}$ определена и непрерывна на множестве $(-\infty,-1)\cup(-1,1]$, так как в точке $x=-1$ знаменатель обращается в нуль. Вычислим односторонние пределы в точке $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{x+1}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty;\quad \lim_{x\to -1+0}\frac{1}{x+1}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

Так как оба односторонних предела в точке $x=-1$ бесконечны, то $x=-1$ является точкой разрыва второго рода.

Функция $y=2^x$ при $x>1$ определена и непрерывна. Функция $y=f(x)$ определена в точке $x=1$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$. Вычислим односторонние пределы в точке $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2};\quad \lim_{x\to 1+0}2^x=2.$$

Односторонние пределы функция $y=f(x)$ в точке $x=1$ конечны, но не равны между собой. Следовательно, точка $x=1$ является точкой разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке равен $f(1+0)-f(1-0)=2-\dfrac{1}{2}=1\dfrac{1}{2}$.

Задание. Определить точки разрыва функции и исследовать характер точек разрыва:

1.1. а) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$; б) $f(x)=\begin{cases}e^{x}, & x\le\\ 2x+1, & x\end{cases}$

1.2. a) $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^3}$; б) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0,\\ 1-x, & 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x>1 \end{cases}$

1.3. a) $f(x)=\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$; б) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ \dfrac{1}{2}, & x>2 \end{cases}$

1.4. a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$; б) $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0,\\ tg\,x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{4},\\ 2, & x\ge\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

1.5. a) $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2, & |x|<1\\ 2, & |x|\ge 1 \end{cases}$

1.6. a) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0,\\ 1-x, & 0\le x\le 2,\\ 2, & x>2 \end{cases}$

1.7. a) $f(x)=\sqrt{x}\,arctg\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x<4,\\ 3, & x\ge 4 \end{cases}$

1.8. a) $f(x)=\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; б) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2 \end{cases}$

1.9. a) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{x-1}, & x>0 \end{cases}$

1.10. a) $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{3^{x-2}}}{\dfrac{1}{3^{x-2}}+1}$; б) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1. «***Предел функции в точке»***

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

Замечательные пределы.

a) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$

b) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$ или $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

С учетом использования эквивалентных бесконечно малых функций, можно привести другие формы записи выражения первого замечательного предела:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin b\alpha}{c\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin b\alpha}{\sin c\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{b\alpha}{tgc\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{arctgb\alpha}{c\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{tgb\alpha}{\arcsin c\alpha}=\frac{b}{c}.$$

Для второго замечательного предела на практике целесообразно использовать соотношения:

1) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{b\alpha}\right)^{c\alpha\pm d}=e^{\frac{ac}{b}}$;

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+a\alpha)^{\frac{b}{c\alpha}\pm d}=e^{\frac{ab}{c}}$.

Пусть C - произвольная постоянная величина, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=\infty$. Тогда имеют место следующие соотношения:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{C}=0$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{C}{f(x)}=\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x)}{C}=\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{C}{F(x)}=0$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{F(x)}=0$; 6) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{F(x)}{f(x)}=\infty$.

П р и м ер. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Решение:

Подставляя вместо переменной ее предельное значение и используя свойства пределов, получим $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{1-4}{1-2}=3$

Ответ: 3.

П р и м е р. Найти $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-1}$.

Решение:

Непосредственная подстановка предельного значения переменной в выражение функции под знаком предела приводит к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Преображаем функцию, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{2x^2-3x-5}{x^2-1}=\frac{(x+1)(2x-5)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x-5}{x-1}.$$

Найдем предел функции после преобразования:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-3x-5}{x^{2-1}}=\lim_{x\to -1} \frac{2x-5}{x-1}=\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{7}{2}$

П р и м е р. Найти $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$

Решение:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}\cdot$$

Но $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}=0.$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+x-3}=\frac{3}{2}$

Ответ: $\frac{3}{2}$

П р и м е р. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}}{x-2}$

Решение:

Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$преобразуем функцию следующим образом:

$$\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}}{x-2}=\frac{(\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x})(\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x})}{(x-2)(\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x})}=$$
$$=\frac{7-x-3-x}{(x-2)(\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x})}=\frac{2(2-x)}{(x-2)(\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x})}=-\frac{2}{\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x}}$$

Найдем предел функции после преобразования:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}}{x-2}=\lim_{x\to 2}-\frac{2}{\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x}}=-\frac{2}{2\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

П р и м е р. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{x^2}$

Решение:

Непосредственная подстановка предельного значения в выражение функции под знаком предела приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ $\frac{1-\cos 10x}{x^2}=\frac{2\sin 5x}{x^2}=2\frac{\sin 5x}{x}\frac{\sin 5x}{x}$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{x^2}= \ =2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}=2\cdot 5\cdot 5=50$

П р и м е р. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x}\right)^{-5x}$

Решение:

Непосредственная подстановка предельного значения переменной в функцию под знаком предела приводит к неопределенности вида $1^{-\infty}$ воспользуемся выражением второго замечательного предела в виде: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{вc}\right)^{cx\pm d}=e^{\frac{ac}{в}}$

Получим: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^{-5x}=e^{\frac{15}{2}}$

Ответ: $e^{\frac{15}{2}}$

Можно получить более общее выражение для вычисления пределов такого типа: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{dx\pm k}=e^{\frac{d}{a}(b-c)}$ (справедливость этого соотношения доказать самостоятельно).

Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-15}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x^2-5x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1-3x)}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-3x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{7-5x}-\sqrt{3x-1}}$.

Вычислить пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{8-x}}{x^2-4x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to -3}(7+2x)^{\frac{4}{x+3}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)\left[\ln(x+5)-\ln x\right]$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{e^{-x^2}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5x-9}}$.

Вычислить пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-1}}{x^2-3x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+x\sin x}{\sin^2 x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(5x-3)[\ln(x+7)-\ln(x-1)]$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)}{e^{x^2}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3-2x}-\sqrt{6+x}}{\sqrt{4x+7}-\sqrt{2-x}}$

Вычислить пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{4x+1}}{x^2-x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)$;

5) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x-4)[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)]$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ctg\,\frac{\pi x}{2}}{x-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-7x}-\sqrt{10-3x}}{\sqrt{4+x}-\sqrt{12+5x}}$.

Вычислить пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-10x+21}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{6x-2}}{x^2+x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x-1)[\ln(3-2x)-\ln(7-2x)]$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\arcsin(4-x)}{\ln(x-3)}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-9}-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{10-x}}$.

Вычислить пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+3x-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+3}}{x^2+2x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)\left[\ln(5-4x)-\ln(1-4x)\right]$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-tgx}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$;

7) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{7+3x}-\sqrt{3+x}}{\sqrt{6-x}-\sqrt{10+x}}$.

Вычислить пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2+x-12}$ 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{3x+2}}{x^2+x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}(1-5x^2)^{-\frac{3}{x^2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)\left[\ln(1-x)-\ln(2-x)\right]$; 6) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+4}{\arcsin(x+2)}$;

7) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{10+x}}{\sqrt{3-2x}-\sqrt{5-x}}$.

Вычислить пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x-6}}{x^2-2x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-ctgx\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to-1}(3+2x)^{\frac{5}{x+7}}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5+2x)\left[\ln(3-2x)-\ln(5-2x)\right]$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{tg^2(\pi-3x)}{(3x-\pi)^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{4-3x}-\sqrt{5-4x}}{\sqrt{7x-3}-\sqrt{6-2x}}$.

Вычислить пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{9-x}}{x^2+x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xtg3x}{\cos x-\cos^3 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to-4}(9+2x)^{\frac{6}{x+4}}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5-x)\left[\ln(7-3x)-\ln(2-3x)\right]$; 6) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\ln(x-4)}{arctg(5-x)}$;

7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3-4x}-\sqrt{8+x}}{\sqrt{4-x}-\sqrt{6+x}}$.

Вычислить пределы функций

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$ 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{2x-5}}{x^2-3x-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7-\cos\frac{x}{3}}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}(-3-2x)^{-\frac{5}{x+2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)[\ln(x+3)-\ln x]$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{e^{3x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2+2x}}{\sqrt{4x-1}-\sqrt{5+x}}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1. «Непрерывность функции»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

Определение. Функция называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если выполняется условие: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

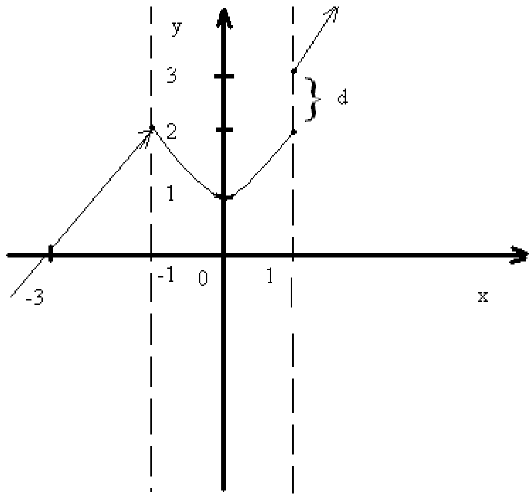
П р и м е р. Исследовать функцию на непрерывность. Сделать чертеж.

$$f(x)=\begin{cases} x+3, \textit{если} \ \ x<-1 \\ x^2+1, \textit{если} \ \ -1\le x\le 1. \\ 3x, \textit{если} \ \ x>1 \end{cases}$$

Решение:

1) Находим односторонние пределы в точке x= -1. Найдем левосторонний предел $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x+3)=2$ Найдем правосторонний предел в точке x=-1 $\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x^2+1)=2$
2) Поскольку односторонние пределы равны значению функции в точке x= -1, то в этой точке функция будет непрерывной.

Находим односторонние пределы функции в точке x=1 $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2$ $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(3x)=3$ Поскольку $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ функция в точке x=1 будет иметь разрыв. Так как односторонние пределы конечны, то разрыв функции в точке x=1 будет разрывом первого рода. В точке x=1 функция имеет скачок $d=\left|\lim\limits_{x\to -1} f(x)-\lim\limits_{x\to 1} f(x)\right|=3-2=1$. Схематический чертеж.



Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию на непрерывность. Сделать схематический чертеж.

1. $f(x)=\begin{cases} x+4, \text{ если } x<-1, \\ x^2+2, \text{ если } -1\le x<1, \\ 2x, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ если } x<-2, \\ x^2+2, \text{ если } -2\le x<2, \\ 3x, \text{ если } x\ge 2. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ если } x<-1, \\ x^2-1, \text{ если } -1\le x<2, \\ x+1, \text{ если } x\ge 2. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} -x+2, \text{если } x<0, \\ x^2-2x+2, \text{ если } 0\le x<3, \\ 2x+1, \text{ если } x\ge 3. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} -x+1, \text{ если } x<0, \\ (x-1)^2, \text{ если } 0\le x<3, \\ 2x, \text{ если } x\ge 3. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ если } x\le -1, \\ x^2+1, \text{ если } -1<x\le 1, \\ -x+3, \text{ если } x>1. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ если } x\le 0, \\ -(x-1)^2, \text{ если } 0<x<2, \\ x-3, \text{ если } x\ge 2. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ если } x<-2, \\ x^2, \text{ если } -2\le x\le 2, \\ 2x, \text{ если } x\ge 3. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{ если } x\le 0, \\ x^2+1, \text{ если } 0<x<1, \\ x, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} -x, \text{ если } x\le 0, \\ x^2, \text{ если } 0<x\le 2, \\ x+1, \text{ если } x>2. \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

2.0 Критерии оценки:

Процент	Качественная оценка уровня подготовки

результативности (правильных ответов)	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «**Исследование функций»**

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

Исследование функций с помощью производной и построение графиков

Цель: Овладение практическими навыками полного исследования функции и построения графиков функции.

Схема проведения полного исследования функции. Возрастание и убывание функции, нахождение участков её монотонности. Стационарные и критические точки функции. Локальные экстремумы функции, условия их существования и нахождение. Глобальные экстремумы функции на отрезке, их нахождение. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба, условия их существования и нахождение. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции, условия их существования и нахождение. Построение графика функции.

Пример выполнения задания.

Провести полное исследование функции

$y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$ и построить её график.

Решение.

1) Находим область определения функции: $D(y)=\{x\in R \mid x^2+2x\neq 0\}$ = $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$.

2) Поскольку данная функция является элементарной, то областью её непрерывности является область определения $D(y)$, а точками разрыва являются точки $x=-2$ и $x=0$,не принадлежащие множеству $D(y)$, но являющиеся предельными точками этого множества (точками в любой окрестности которых содержатся точки данного множества). Исследуем характер разрыва в точках $x=-2$ и $x=0$ вычислив в них односторонние пределы функции:

$\lim\limits_{x\to-2-0}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\dfrac{1}{(-2)\cdot(-0)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2+0}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\dfrac{1}{(-2)\cdot(+0)}=-\infty$,

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(-0)\cdot 2}=-\infty\ , \qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=\frac{1}{(+0)\cdot 2}=+\infty\ .$$

Так как односторонние пределы функции в точках $x=-2$ $x=0$ - бесконечные, то данные точки являются точками бесконечного разрыва.

3) Функция не является периодической.

Функция $y=f(x)$ в аналитическое выражение которой входит хотя бы одна непериодическая функция периодической не является.

Проверяем является ли функция чётной или нечётной. Так как область определения функции $D(y)$ $=(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,+\infty)$ не симметрична относительно точки $x=0$, то данная функция – общего вида.

4) Находим точки пересечения графика с осями координат.

Так как $x=0\notin D(y)$ то точек пересечения графика с осью Oy нет

Положим $y=0$ и решим уравнение $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}=0$ Его решением является $x=-1$. Следовательно, точка $(-1,\,0)$ - точка пересечения графика с осью Ox

5) Находим вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

Прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда x_0 является точкой бесконечного разрыва функции $y=f(x)$

Так как точки $x=-2$ $x=0$ - точки бесконечного разрыва данной функции, то вертикальными асимптотами графика функции являются прямые $x=-2$ $x=0$

Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ тогда и только тогда, когда одновременно существуют конечные пределы: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$

Вычисляем сначала пределы при $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x}=0=k_1\,,\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=1=b_1\ .$$

Следовательно, $y=k_1x+b_1=0\cdot x+1$ $y=1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x\to-\infty$.

Аналогично вычисляем пределы при $x\to+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2}{(x^2+2x)x}=0=k_2$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}=1=b_2$$

$y=k_2x+b_2=0\cdot x+1$ $y=1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x\to+\infty$.

6) Определяем интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Для этого находим первую производную функции:

$$y'=\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}\right)'==\frac{\left((x+1)^2\right)'\cdot(x^2+2x)-(x+1)^2(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2}==\frac{2(x+1)(x^2+2x)-(x+1)^2(2x+2)}{(x^2+2x)^2}=-\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$$

и определяем критические точки функции $y=f(x)$, т.е. точки $x_i\in D(y)$ в которых $f'(x_i)=0$ не существует:

$y' = -\dfrac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2} = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \in D(y)$;

y' не существует при $x^2+2x=0 \Rightarrow x=0 \notin D(y)$ и $x=-2 \notin D(y)$.
Таким образом, единственной критической (стационарной) точкой функции $y=f(x)$ является точка $x_1=-1$.

Исследуем знак производной $y'=f'(x)$ в интервалах, на которые критические точки функции $y=f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Результаты исследования представим следующей таблицей:

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	возрастает	возрастает	0	убывает	убывает

Так как при переходе слева направо через точку $x=-1$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на « $-$ », то точка $x=-1$ является точкой локального максимума и $y_{\max}=y(-1)=0$.

7) Определяем интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Для этого находим вторую производную функции:

$$y''=(y')'=\left(-\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}\right)'=-2\left(\frac{(x+1)'(x^2+2x)^2-(x+1)((x^2+2x)^2)'}{(x^2+2x)^4}\right)=$$

$$=-2\left(\frac{1\cdot(x^2+2x)^2-(x+1)\cdot 2\cdot(x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x)^4}\right)=\frac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3}$$

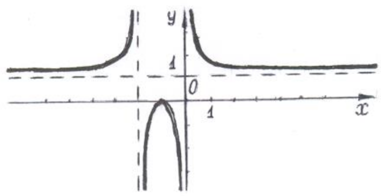
и определяем точки возможного перегиба $y=f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f''(x_i)=0$ или $f''(x_i)$ не существует: $y''=\dfrac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3}\neq 0$, так как $3x^2+6x+4\neq 0$ (квадратное уравнение не имеет действительных корней); y'' не существует при $x^2+2x=0 \Rightarrow x=0\notin D(y)$ и $x=-2\notin D(y)$.
Таким образом, функция $y=f(x)$ не имеет точек возможного перегиба.

Исследуем знак второй производной $y''=f''(x)$ в интервалах, на которые точки возможного перегиба функции $y=f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Результаты исследования представим таблицей:

x	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
y''	$+$	$-$	$+$
y	график вогнутый	график выпуклый	график вогнутый

Точек перегиба нет.

8) На основании полученных результатов строим график функции



Задание. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить её график.

1. $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 54$
2. $y = -4x^2 + 24x - 15$
3. $y = x^3 + 6x^2$
4. $y = 6x - x^3$
5. $y = x^3 - 14x^2 + 60x - 72$
6. $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 20$
7. $y = x^4 - 2x^3 + 6x - 4$
8. $y = -x^4 - 2x^3 + 12x^2 + 15x - 6$
9. $y = 3x^5 - 10x^4 - 30x^3 + 12x + 7$
10. $y = x^3 - x$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10-11

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «***Интегрирование»***

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

Если данный интеграл с помощью алгебраических преобразований трудно или невозможно свести к одному или нескольким табличным интегралам, то для его отыскания применяют особые способы.

Способ подстановки (замены переменной).

Этот способ состоит в следующем.

1.Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2.Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3.Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.

4.Производят замену под интегралом.

5.Находят полученный интеграл.

6.В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной.

Пример:

В интеграле $\int \sin x \cos x dx$ удобно произвести замену t=sin x, так как оставшаяся часть подынтегрального выражения равна cos x dx=d t.

Тогда данный интеграл можно переписать в виде:

$$\int \sin x \cos x dx = \int t dt$$

Найдём его $\int t dt = \frac{1}{2}t^2 + c$

Полученный интеграл табличный.

Произведя обратную замену t=sinx, получаем ответ

$$\frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

Способ интегрирования по частям:

При интегрировании функций, содержащих произведения, логарифмы и обратные тригонометрические функции, бывает удобно воспользоваться формулой:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

С помощью данной формулы нахождение интеграла $\int u dv$ сводится к нахождению интеграла $\int v du$, который может оказаться проще данного или табличным.

При использовании формулы интегрирования по частям данное подынтегральное выражение представляют в виде произведения двух сомножителей, которые обозначают и u dv множитель и выбирают так, чтобы u^1 было проще, чем u.

При использовании формулы интегрирования по частям для нахождения интегралов от произведения нельзя дать общее правило для определения того, какой сомножитель в подынтегральном выражении следует обозначать через u и какой через dv. Ограничимся следующими рекомендациями:

При вычислении интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx; \quad \int P(x)\arcsin xdx; \quad \int P(x)arcctgxdx;,$$

где P(x)-многочлен, за функцию u принимается соответственно lnx, arcsinx, arctgx.

При вычислении интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx; \quad \int P(x)\sin axdx; \quad \int P(x)\cos axdx; \quad a \neq 0$$

за u принимается многочлен P(x).

Найти интегралы способом подстановки:

$$1)\int (x^3+4)^7 x^2dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2dx \\ x^2dx = \dfrac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int t^7 \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^7dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8}+c = \frac{t^8}{24}+c = \frac{(x^3+4)^8}{24}+c$$

$$2)\int x\cos 5x^2dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x^2 \\ dt = 10xdx \\ xdx = \dfrac{1}{10}dt \end{array} \right| = \int \cos t \cdot \frac{1}{10}dt = \frac{1}{10}\int \cos tdt = \frac{1}{10}\sin t + c = \frac{1}{10}\sin 5x^2 + c$$

$$3)\int \frac{\arcsin^2 xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \int t^2dt = \frac{t^3}{3}+c = \frac{\arcsin^3 x}{3}+c$$

$$4)\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \\ t^2 = x+1 \\ x = t^2-1 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{(t^2-1)\cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + c$$

Найти интегралы методом интегрирования по частям:

$$1)\int (3x-2)\cos xdx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x-2 & dv = \cos xdx \\ du = 3dx & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= (3x-2)\cdot\sin x - \int \sin x \cdot 3dx = (3x-2)\sin x + 3\cos x + c$$

$$2)\int \ln x(5x+4)dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x & dv=(5x+4)dx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=\frac{5x^2}{2}+4x \end{matrix} \right| = (\frac{5x^2}{2}+4x)\cdot\ln x-\int(\frac{5x^2}{2}+4x)\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=(\frac{5x^2}{2}+4x)\ln x-\int\left(\frac{5x}{2}+4\right)dx=(\frac{5x^2}{2}+4x)\ln x-\frac{5x^2}{4}-4x+c$$

$$3)\int arctgxdx = \left| \begin{matrix} u=arctgx & dv=dx \\ du=\frac{dx}{1+x^2} & v=x \end{matrix} \right| = arctgx\cdot x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^{2)}}{1+x^2}=$$

$$=x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

Задание для самостоятельной работы

Вариант 1

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx; \qquad \int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx; \qquad \int x^3\ln xdx.$$

Вариант 2

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx; \qquad \int\frac{x^3dx}{\left(x^4+1\right)^3}; \qquad \int(x-1)e^x dx.$$

Вариант 3

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx \qquad \int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx; \qquad \int x\,arctgxdx.$$

Вариант 4

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int\frac{(x-4)(x+6)}{x^2}dx; \qquad \int\frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}; \qquad \int\ln(5x-1)dx$$

Вариант 5

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int\left(x^3-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{x^2-4}\right)dx; \qquad \int\frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}}dx; \qquad \int arctg\,2x dx.$$

Вариант 6

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int\frac{x^3+x\sin x}{x}dx; \qquad \int\frac{x^2dx}{\left(x^3-1\right)^3}; \qquad \int\sqrt{x}\ln x dx.$$

Вариант 7

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int\left(e^x+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)dx; \qquad \int x\cos\left(x^2-4\right)dx; \qquad \int x\cdot 2^{-x}dx.$$

Вариант 8

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int\frac{x^2\left(x-2\right)}{x^3}dx \qquad \int\frac{dx}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}; \qquad \int x\cos 3x dx.$$

Вариант 9

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int\left(x^5-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{1}{x^2+16}\right)dx; \qquad \int\frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}; \qquad \int\ln 4x dx.$$

Вариант 10

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int\frac{\sqrt{x}+xe^x}{x}dx; \qquad \int\frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos 3x-4}}dx; \qquad \int x\sin 4x dx.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично

70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «**Интегрирование**»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

Формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(x)_a^b = F(b) - F(a).$

Пример 1.

$$\int_{\pi}^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi)) = -1$$

Пример 2

$$\cdot \int_1^4 x dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4 = \left(\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{16-1}{2} = 7.5$$

Пример 3.

$$\int_0^2 (1 - \mathrm{x})^2 dx = \left| \begin{array}{l} 1 - x = t \\ dx = -dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 - 0 = 1 \\ x = 2 \Rightarrow t = 1 - 2 = -1 \end{array} \right| = -\int_1^{-1} \mathrm{t}^2 dt = \int_{-1}^{1} \mathrm{t}^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{(1)^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Пример 4

$$\cdot \int_0^{3\pi/2} \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 2 \cdot \frac{3\pi}{2} = 3\pi \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{3\pi} \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t\Bigg|_0^{3\pi} = \frac{1}{2}(\sin 3\pi - \sin 0) = 0$$

Вариант 1	$\int_0^3 (2x^2 - x + 4)dx.$	$\int_1^e \ln^2 x dx$

Вариант 2	$\int_0^2 (4x^2 + x - 3)dx.$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x - \sin x)^3} dx$
Вариант 3	$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3};$	$\int_0^1 xe^{-x} dx$
Вариант 4	$\int_1^8 \sqrt[3]{x^2 dx};$	$\int_0^1 \frac{x^3 + 1}{(x^4 + 4x + 2)^2} dx$
Вариант 5	$\int_2^3 (2x-1)^3 dx$	$\int_0^1 xe^{-x} dx$
Вариант 6	$\int_0^1 (3x+1)^4 dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2tgx}{\cos^2 x} dx$
Вариант 7	$\int_1^3 e^{2x} dx;$	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + x\cos x}{(x\sin x)^3} dx$
Вариант 8	$\int_1^3 5^{2x} dx;$	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2\arcsin x + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «***Площадь криволинейной трапеции***».

2.4. Время выполнения:
Выполнение _1_час _30_мин;

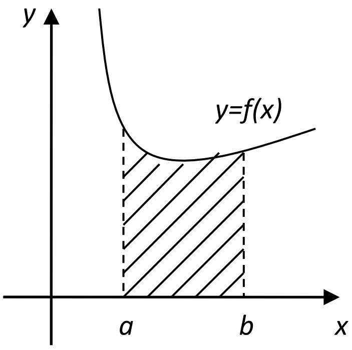
Процесс вычисления определённого интеграла виден из формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Правила вычисления площадей плоских фигур.

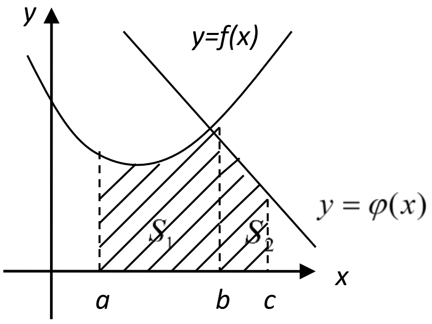
1) Площади фигур, расположенных над осью OX.

а)



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

б)



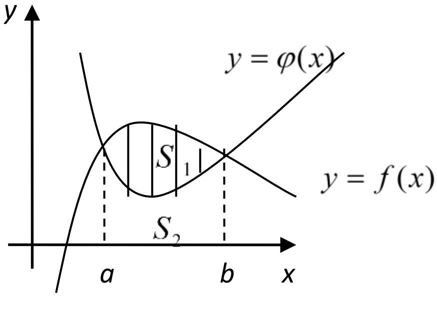
$$S_ф = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx$$

$$S_2 = \int_b^c \varphi(x)dx$$

$$S_ф = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c \varphi(x)dx$$

в)



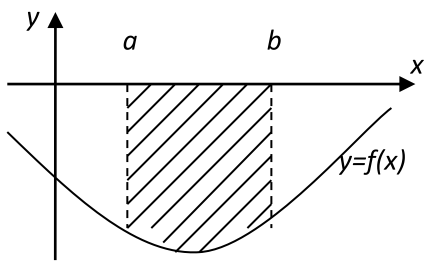
$$S_{\phi} = S_1 - S_2$$

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx$$

$$S_2 = \int_a^b \varphi(x)dx$$

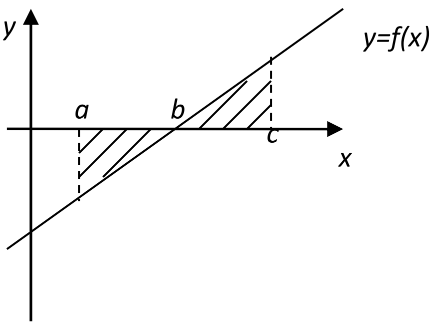
$$S_{\phi} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx$$

2) Площади фигур, расположенных под осью ОХ.



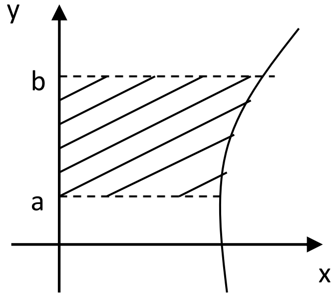
$$S\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

или $S = \int_b^a f(x)dx$



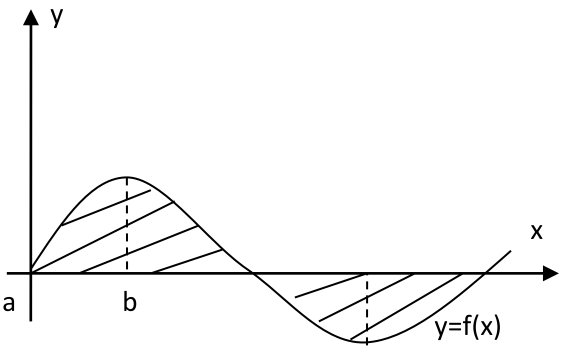
$$S = \int_b^a f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

3) Площади фигур, прилегающих к оси *OY*.



$$S = \int_a^b f(y)dy$$

Площадь симметричных фигур



$$S = n \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Образец решения практической работы.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

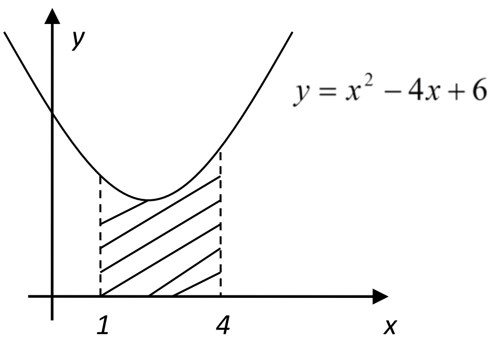
1) $y = x^2 - 4x + 6;$ *x=1; x=4; y=0*

Решение:

$y = x^2 - 4x + 6$ -график парабола, ветви направлены вверх.

Вершина $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

$y_0 = y(x_0) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2$



x=1 – прямая параллельная оси OY

x=4 – прямая параллельная оси OY

$$S = \int_1^4 (x^2 - 4x + 6)dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x\Big|_1^4 = \left(\frac{64}{3} - 32 + 24\right) - \left(\frac{1}{3} - \right.$$

$$= \frac{64}{3} - 8 - \frac{1}{3} - 4 = \frac{63}{3} - 12 = 21 - 12 = 9$$

Ответ: S=9 ед^2

Вычислить площадь криволинейной трапеции

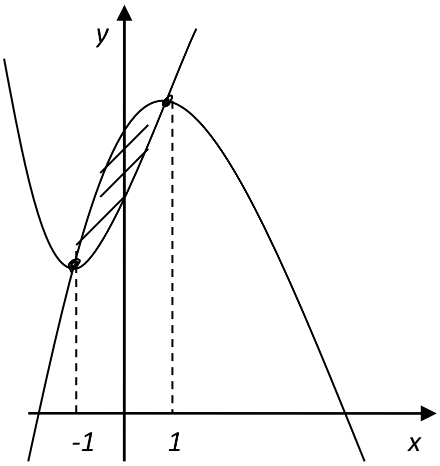
$2) y = x^2 + 2x + 4$ $\qquad\qquad$ $y = -x^2 + 2x + 6$

Решение:

$y = x^2 + 2x + 4$ - график парабола, ветви направлены вверх.

Вершина $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$

$y(-1) = 1 - 2 + 4 = 3$



$б) y = -x^2 + 2x - 6$ - график парабола, ветви направлены вниз.

Вершина:

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$
$y(1) = -1 + 2 + 6 = 7$

$$S_1 = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 2x + 6)dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 6x \Big|_{-1}^{1} = (-\frac{1}{3} + 1 + 6) - (\frac{1}{3} + 1 - 6$$

$$= 12 - \frac{2}{3} = 11\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x + 4)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x \Big|_{-1}^{1} = (\frac{1}{3} + 1 + 4) - (-\frac{1}{3} + 1 - 4) =$$

$$S_ф = 11\frac{1}{3} - 8\frac{2}{3} = 10\frac{4}{3} - 8\frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Ответ $2\frac{2}{3}$ ед^2

Вычислить площадь криволинейной трапеции

$y = \sin x; \quad x = -\frac{П}{2}; \quad x = П; \quad y = 0$

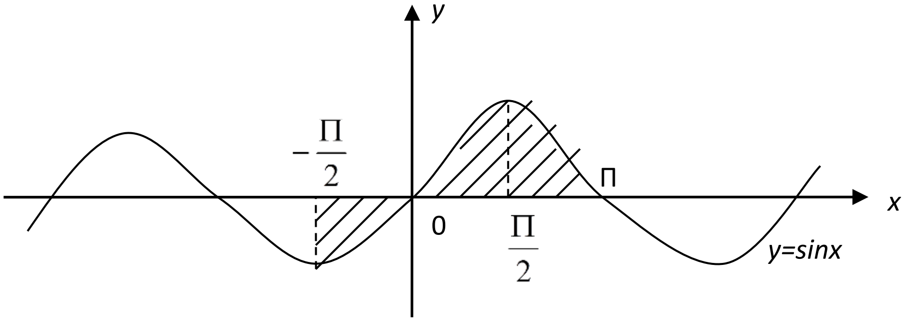
Решение:

$y=sinx$ – синусоида.

$x=-\frac{\Pi}{2}$ - прямая параллельная оси OY

$x=\Pi$- прямая, параллельная оси OY

$y=0$ –ось OY



$$S=3\cdot\int_0^{\frac{\Pi}{2}}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\Pi}{2}}=3(-\cos\frac{\Pi}{2}-(-\cos 0))=3(0+1)=3$$

Ответ:3 ед^2

Вычислить площадь криволинейной трапеции

4)$y=\frac{3}{x}$;   y=2+x   x=3;   x=-1; y=0

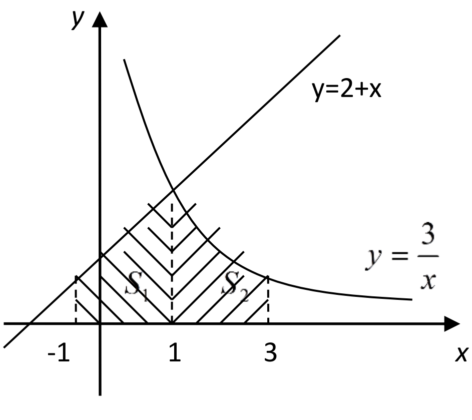
$y=\frac{3}{x}$ - гипербола

$y=2+x$ - прямая

$y=0$ - ось OX

$x=3$ - прямая, параллельная OY

x = -1-прямая параллельная OY



$$S_1=\int_{-1}^{1}(2+x)dx=2x+\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=(2+\frac{1}{2})-(-2+\frac{1}{2})=$$

$$=2+\frac{1}{2}+2-\frac{1}{2}=4$$

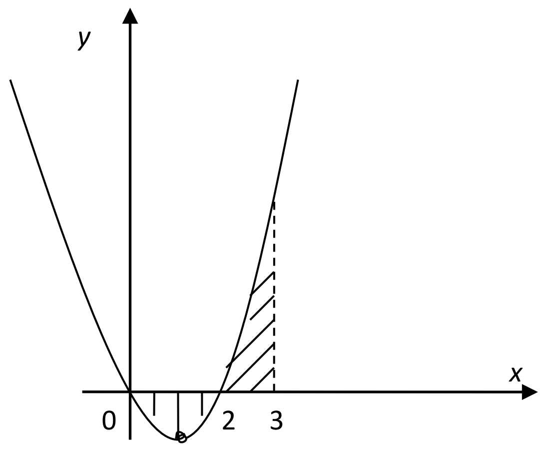
$$S_2 = \int_1^3 \frac{3}{x}dx = 3\ln|x|\Big|_1^3 = 3\ln 3 - 3\ln 1 = 3\ln 3 - 0 =$$
$$= 3\ln 3$$

$$S = S_1 + S_2 = 4 + 3\ln 3$$

Ответ: *4+3ln3* ед^2

Вычислить площадь криволинейной трапеции

5) $y = x^2 - 2x$; *x=0* *x=3;* *y=0*



$y = x^2 - 2x$ - парабола, ветви направлены вверх.

Вершина:

$$x_0 = \frac{2}{2} = 1 \qquad y(1) = -1$$

x=0; *x=3* - прямые, параллельные OY

y=0 – ось *OX*

$$S_1 = \left|\int_0^2 (x^2 - 2x)dx\right| = \left|\frac{x^3}{3} - x^2\right|_0^2 = \left|(\frac{8}{3} - 4) - (0-0)\right| = \left|2\frac{2}{3} - 4\right| = \left|-1\frac{1}{3}\right| = 1\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)dx = \frac{x^3}{3} - x^2\Big|_2^3 = (9-9) - (\frac{8}{3-4}) = 0 - (-1\frac{1}{3}) = 1\frac{1}{3}$$

$$S = 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$$ ед^2

Ответ $2\frac{2}{3}$ ед^2

Практическая работа.

1 вариант.

Вычислить определённые интегралы:

1) $\int_{-3}^{2}(3x^2+2x-3)dx$

2) $\int_{-\frac{\Pi}{2}}^{\Pi}\frac{dx}{\cos^2 x}$

3) $\int_{1}^{3}\frac{dx}{(x-2)^3}$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функций:

1) x^2-4x+7 $\quad$ *y=0 x=1 x=3*

2) $y=-x^2+2x+3$ $\quad$ $y=x^2-2x+3$

3) $y=\sin\left(x-\frac{\Pi}{3}\right)$ $\quad$ *x=0* $\quad$ $x=\frac{4\Pi}{3}$ $\quad$ *y=0*

2 вариант.

Вычислить определённый интеграл.

1) $\int_{-1}^{1}(4x^3-3x^2+2)dx$

2) $\int_{0}^{\frac{\Pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}$

3) $\int_{2}^{6}\sqrt{2x-3}dx$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

1) $y=-x^2+4x$ $\quad$ *y=0 x=1 x=3*

2) $y=x^2-4x+6$ $\quad$ $y=6-x$

3) $y=\sin\left(x+\frac{\Pi}{3}\right)$ $\quad$ $x=-\frac{\Pi}{2}$ $\quad$ *x=П;* $\quad$ *y=0*

3 вариант.

Вычислить определённый интеграл.

1) $\int_{-2}^{0}(5x^4+4x^3-7)dx$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $\int_{1}^{\frac{4}{3}}(3x-2)^4\,dx$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

1) $y=-x^2+4$ *y=0; x=0; x=2*

2) x^2+4x+5 *y=5-x; x=-3*

3) $y=\sin\left(x+\frac{\Pi}{3}\right)$ $x=-\frac{\Pi}{2}$*; x=П; y=0*

4 вариант.

Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_{0}^{2}(4x^3-4+6x^2)dx$

2) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$

3) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(2x+1)^2}$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

1) $y=x^2-2x+1$ *y=0 x=0; x=3*

2) $y=-x^2+2x+4$ *y=4-x*

3) $y=\cos 2x$ $x=-\frac{\Pi}{2}$; *x=П; y=0*

5 вариант.

Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_{-2}^{1}(4x-5x^4+8x)dx$

2) $\int_{-\frac{П}{3}}^{\frac{П}{6}}\sin x dx$

3) $\int_{\frac{2}{3}}^{3}\sqrt[3]{3x-1}dx$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

1) $y=-x^2-4x$ *y=0*   *x=-3*   *x=-1*

2) $y=x^2+6x+11$ *y=x+7*

3) $y=2\sin x$ $x=-\frac{П}{3}$ $x=\frac{П}{2}$ *y=0*

6 вариант.

Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_{-3}^{0}(2x^2-4x^3+6x)dx$

2) $\int_{-\frac{П}{3}}^{\frac{П}{6}}\frac{dx}{\cos^2 x}$

3) $\int_{9}^{11}(x-7)^3 dx$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

1) $y=x^2-2x+2$ *y=0*   *x=1*   *x=3*

2) $y=x^2+4x+5$ *y=5*

3) $y=\cos\frac{1}{2}x$ *x=0* $x=\frac{3П}{2}$ *y=0*

7 вариант.

Вычислить определённый интеграл.

1) $\int_{0}^{3}(4x-3x^{2}+8x^{3})dx$

2) $\int_{-\frac{\Pi}{4}}^{\Pi}\frac{dx}{\sin^{2}x}$

3) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(2x-1)^{5}}$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

1) $y=x^{2}+6x+9$ *y=0* *x=-1* *x=-3*

2) $y=x^{2}+2x$ $y=-x^{2}+4x$

3) y = sin2x $x=-\frac{\Pi}{2}$; *x=П;* *y=0*

8 вариант.

Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_{-1}^{1}(6x^{5}-3x^{2}+4x)dx$

2) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$

3) $\int_{5}^{21}\sqrt[4]{(x-5)}dx$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

1) $y=-x^{2}+2x+3$ *y=0* *x=-1* *x=2*

2) $y=-x^{2}-4x$ *y=-x*

3) $y=\cos\left(x-\frac{\Pi}{3}\right)$ *x=0* $x=\frac{4\Pi}{3}$; *y=0*

9 вариант.

Вычислить определённый интеграл.

$$1)\int_{0}^{3}(3x^2-6x+2)dx$$

$$2)\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$3)\int_{-2}^{-1}(2x+6)^3\,dx$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

1) $y=x^2+2x+4$ *y= x=-2 x=1*

2) $y=x^2-2x+1$ *y=x+1*

3) $y=\sin\frac{1}{2}x$ *x=0* $x\frac{3П}{2}$ *y=0*

10 вариант.

Вычислить определённый интеграл.

$$1)\int_{-1}^{2}(4x^3-4x+8)dx$$

$$2)\int_{-\frac{П}{2}}^{\frac{П}{6}}\sin x dx$$

$$3)\int_{-6}^{-2}(x+4)^3\,dx$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

1) $y=x^2-4x+6$ *y=0 x=0 x=4*

2) $y=x^2$ *y=0 y=x+6*

3) $y=\sin\left(x+\frac{П}{3}\right)$ $x=-\frac{П}{2}$ *x=П; y=0*

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично

70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «***дифференциальные уравнения***»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

Задание: Проверить подстановкой, что данная функция является общим решением (интегралом) данного дифференциального уравнения:

1.	$y = 3x + 1$; $xy^{/} = y - 1$	4.	$y = 3x^3 - 2x; dy = (3x^2 - 2)\,dx$
2.	$y = x^2 + x + C;\quad dy = (2x + 1)$	5.	$y = Ce^{2x}$; $y^{/} = 2y$
3.	$y = \sqrt{x}$; $2yy^{/} = 1$	6.	$y = Cx + 1$; $xy^{/} = y - 1$

Задание: Найти общие решения дифференциальных уравнений методом разделения переменных:

7.	$\cos xy^{/} = (1 + y)\sin x$	10.	$xy^{/} - y = 0$
8.	$yy^{/} + x = 0$	11.	$y^{/} = \sin x$
9.	$y^{/} = y$	12.	$x^2y^{/} + y = 0$

Задание: Найти частные решения уравнений первого порядка, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

13.	$2y^{/}\sqrt{x} = y,\qquad y_0 = 1, \text{при } x_0 = 4$	16.	$\frac{xdx}{y} - dy + \frac{dx}{4y} = 0,$ $y \neq 0\,, y_0 = -5, \text{при } x_0 = 3$
14.	$x^2y + y^2 = 0,\quad y_0 = 1, \text{при } x_0 = -4$	17.	$y^{/} = \dfrac{y}{4x}\,, y_0 = -10, \text{при } x_0 = 16$
15.	$xy^{/} = \dfrac{y}{lnx},\qquad y_0 = 1, \text{при } x_0 = e$	18.	$x^2\dfrac{\partial y}{\partial x} = y, y_0 = 5 \text{ при } x_0 = 0$

Задание: **Решить линейные уравнения первого порядка:**

19.	$y^{/} - \dfrac{y}{x} = x$	22.	$y^{/} + \dfrac{2y}{x} = x^3$
20.	$y^{/} + x^2y = 2e^{-\frac{x^3}{3}}$	23.	$y^{/} - y = e^x$
21.	$y^{/} = x + y$	24.	$xy^{/} + y = 3$

Задание: **Найти частные решения однородных дифференциальных уравнений:**

25.	$xdy - ydx = ydy$, если при $x = -1, y = 1$	28.	$(1-x)dy - (y-1)dx = 0$, если при $x = 2, y = 3$
26.	$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, если при $x = 1, y = -2$	29.	$2(x+1)dy - ydx = 0$, если при $x = 1, y = 2$
27.	$(x+3)dy - (y+2)dx = 0$, если при $x = 2, y = 3$	30.	$(x^2+1)dy = 2xydx$, если при $x = 1, y = 2$

Пояснения к работе:

Необходимые формулы:

Алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка
y' = f(x,y) с разделяющими переменными

1. Рассмотрим производную y' как отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$
2. Перенесем *dx* в правую часть и разделим уравнение на *h(y):*

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot h(y), \Longrightarrow \frac{dy}{h(y)} = p(x)\mathrm{dx}$$

3. Разделим обе части уравнения на *h(y) ≠ 0*
4. Запишем уравнение в форме:

$$q(y)dy = p(x)dx$$

5. Проинтегрируем дифференциальное уравнение $\int q(y)dy = \int p(x)dx + C$

где С − постоянная интегрирования.

6. Вычислим интегралы, получаем выражение $Q(y) = P(x) + C$

Пример 1

$$(1+x)y' + y = 0$$

Решение: учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$

$$(1+x)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$ydx + (1+x)dy = 0$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{1+x} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл:

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{dy}{y};$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(1+x)}{1+x} + C;$$

$$\ln|y| = \ln|1+x| + \ln C;$$

$$\ln|y| = \ln|C \cdot (1+x)|;$$

$$y = C(1+x) - \textit{общее решение диф. уравнения}$$

Пример

решения частного значения дифференциального уравнения

$y' = x + 2$; $y(0) = 1$.

Решение: Приведем уравнение к виду (1) и разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = x + 2$$

$$dy = (x + 2)dx.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл

$$\int dy = \int (x + 2)dx;$$

$$\int dy = \int xdx + \int 2dx;$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 2x + C - \textit{общее решение диф. уравнения}.$$

Т.к. $y(0) = 1$ то подставляя это начальное условие в общее решение диф. уравнения, найдем значение С:

$$y(0) = \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Значит частное решение данного диф. уравнения имеет вид:

$$y = \frac{x^2}{2} + 2x + 1.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «***Задача Коши»***

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

Пример. Найти частное решение уравнения:

$$\begin{cases} 2yy' = 1 - 3x^2; \\ y_0 = 3 \quad \text{при} \quad x_0 = 0; \end{cases}$$

Решение: это уравнение с разделяющимися переменными. Представим его в дифференциалах. Учитывая, что $y' = \frac{dx}{dy}$ получим $2y\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$ Разделим переменные:

$2ydy = (1 - 3x^2)dx$

Интегрируя обе части последнего равенства, найдём $y^2 = x - x^3 + C$ Подставив начальные значения $x_0 = 1$, $y_0 = 3$,

найдём C: $9 = 1 - 1 + C$, т.е. $C = 9$. Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2 = x - x^3 + 9$

2.1.4 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется ***однородным,*** если $f(x,y)$ –
однородная функция нулевого измерения. Его можно представить в виде

$$P(x,y)dx + Q(x,y)\,dy = 0, \qquad (11)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Однородное дифференциальное уравнение приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = z \cdot x$

Где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример. Найти решение уравнения $(x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0$

Решение: В данном уравнении функции $P(x,y) = x^2 - 2y^2$, $Q(x,y) = 2xy$ – однородные функции второго измерения, следовательно, данное уравнение является однородным. $y = z \cdot x$, $dy = zdx + xdz$ Подставляем эти выражения y и dy в данное уравнение: $x^2dx - 2(zx)^2dx + 2xzx(zdx + xdz) = 0$ $x^2dx - 2x^2z^2dx + 2x^2z^2dx + 2x^3z = 0$ $x^2(dx + 2xz) = 0$ или

$dx + 2xzdz = 0$ Разделяем переменные (считая $x \neq 0$) $2zdz + \frac{dx}{x} = 0.$

Интегрируем почленно это уравнение (учитывая, что $z = z(x)$ $\int 2zdz + \int \frac{dx}{x} = C_1$

откуда $z^2 + \ln|x| = \ln|C|$ после потенцирования получим $x = Ce^{-z^2}$

Возвращаясь к прежней функции общий интеграл $x = Ce^{-\frac{y^2}{x^2}}$

Пример. Найти частное решение уравнения $\begin{cases} 2xyy' = x^2 + y^2 \\ y = 2, \ при \ x = 1 \end{cases}$

Решение: запишем данное уравнение в виде $(x^2 + y^2)dx - 2xy\,dy = 0$. Легко можно убедиться в том, что оно однородно. Положим $y = zx$, откуда $dy = zdx + xdz$. Подставляя значения y и dy в уравнение, имеем (при $x \neq 0$, $1 - z^2 \neq 0$) :

$$(x^2 + z^2x^2)dx - 2xzx(zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow (1 - z^2)dx = 2xzdz \Leftrightarrow \frac{2zdz}{1 - z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем $-\ln|1 - z^2| = \ln|x| - \ln|C|, C \neq 0,$ или $\ln|x| + \ln|1 - z^2| = \ln|C|,$

откуда $x(1-z^2) = C$, или $x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C.$ Подставив в найденное решение начальные условия, найдём $1\left(1 - \frac{2^2}{1^2}\right) = C$ и $C = -3.$ Итак, искомое частное решение будет

$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = -3,$ *или* $x^2 - y^2 + 3x = 0.$

2.1.5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + f(x) + \varphi(x) = 0$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$-функции от x, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*** В частном случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами.

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$y = u \cdot v$$

где u и v - новые функции от x.

Пример. Найти общее решение уравнения: $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

Это линейное уравнение: здесь $f(x)= - 2/(x+1)$, $\varphi(x) = -(x+1)^3$. Положим $y=uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставив теперь выражения для y и y' в данное уравнение, получим

$u'v + uv' - \dfrac{2uv}{x+1} = (x+1)^3$;

или
$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x+1}\right) = (x+1)^3$$

Так как одну из вспомогательных функций u или v можно выбрать произвольно, то в качестве v возьмем одно из частных решений уравнения

$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x+1} = 0$$

Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}; \qquad \int \frac{dv}{dx} = 2\int \frac{dx}{x+1}; \qquad \ln v = 2\ln(x+1); \qquad v = (x+1)^2$$

(произвольную постоянную C принимаем равной нулю, так как находим одно из частных решений). Подставим теперь выражение для v в уравнение (*); тогда получим

уравнение $u'v = (x+1)^2$; $\dfrac{du}{dx} \cdot (x+1)^2 = (x+1)^3$ или $\dfrac{du}{dx} = x+1$. Отсюда находим

$$\int du = \int (x+1)dx; \qquad u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

Зная u и v, теперь получаем общее решение данного уравнения:

$$y = uv = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + C\right)(x+1)^2 = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$$

Пример. Найти частное решение уравнения $\begin{cases} \cos x dy + y \sin x dx = dx; \\ y = 1 \quad при \quad x = 0 \end{cases}$

Решение: разделив все члены данного уравнения на $\cos xdx$, получим уравнение

$$\frac{dy}{dx} + ytgx = \frac{1}{\cos x}$$

которое является линейным. Положим $y = uv$; тогда $y' = u'v + uv'$

Подставив в выражение для y и y' в уравнение (*), имеем

$$u'v + uv' + uvtgx = \frac{1}{\cos x}$$

или
$$u'v + u(v' + vtgx) = \frac{1}{\cos x}$$

Для отыскания получаем уравнение v

$$v' + vtgx = 0; \quad \frac{dv}{dx} = -vtgx; \quad \frac{dv}{v} = -tgxdx$$

откуда

$$\int \frac{dv}{v} = -\int tgxdx; \quad \ln v = \ln \cos x; \quad v = \cos x$$

Подставляя выражение для v в уравнение (*), имеем

$$u' cosx = \frac{1}{\cos x}; \quad или \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad т.е. \quad u = tgx + C$$

Следовательно, общее решение данного уравнения записывается так:

$$y = uv = (tgx + C)\cos x = \sin x + C\cos x$$

Используя начальные условия *y=1, x=0*, имеем

$$1 = \sin 0 + C\cos 0; \quad т.е. \; C = 1$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = \sin x + \cos x$$

Задание для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $(x+1)ydx = dy$

2. Найти решение задачи Коши: $\begin{cases} x^2 dy = y^2 dx \\ y = 0{,}25 \quad при \quad x = 0{,}1 \end{cases}$

3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $(x+y)dy + ydx = 0$

4. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения $\begin{cases} (x-y)dx + xdy = 0 \\ y = 0 \quad при \quad x = 1 \end{cases}$.

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$y' + 4\frac{y}{x} + x = 0$$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$y'(1 - x^2) = xy + 1, \qquad y(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2}{3}\Pi$$

Вариант 2

1.Найти общее решение дифференциального уравнения $2xdx = 3y^2dy$

2.Найти решение задачи Коши $\begin{cases} \dfrac{dy}{3x} - \dfrac{dx}{2y} = 0 \\ y = 5 \quad при \quad x = 4 \end{cases}$

3.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения: $xydx - \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$

4.Найти частное решение однородного дифференциального уравнения $\begin{cases} xy^2y' = x^3 + y^3 \\ y = 3 \quad при \quad x = 1 \end{cases}$

5.Найти общее решение линейного дифференциального уравнения:

$$x^2y' + 2xy - 1 = 0$$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$y' + 3y = e^{2x}; y(0) = \frac{3}{5};$$

Вариант 3

1.Найти общее решение дифференциального уравнения $x^3dy - y^3dx = 0$

2.Найти решение задачи Коши $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} \\ y = e^2 при \quad x = 9 \end{cases}$

3.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xydy = 0$;

4.Найти частное решение однородного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y^2dx + \left(x^2 - xy\right)dy = 0 \\ y = 1, если \quad x = 1 \end{cases}$$

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y' - 7y = 8e^{3x}$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2, \qquad y(3) = 40$$

Вариант 4

1.Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = x^2 y - x^2$

2.Найти решение задачи Коши $\begin{cases} y'\sqrt{x} = 1 + y^2 \\ y = 0 \quad при \quad x = 4 \end{cases}$

3.Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $x^3 y' = y\left(y^2 + x^2\right)$

4.Найти частное решение однородного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} x^2 y' = xy + y^2 \\ y = 1, если \quad x = 1 \end{cases}$$

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $(x^2 + 1)y' - xy = x^3 + x$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$\frac{xdy}{dx} - y = x^2 \sin x; \qquad y(\frac{\Pi}{2}) = \Pi$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «***ряды***».

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n .$$

Решение. Находим:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Так как $C = \dfrac{1}{2} < 1$ то данный ряд сходится.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\arcsin^n \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \arcsin\frac{1}{n} = \arcsin 0 = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\left((n+1)/n\right)^{n^2}}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{\left((n+1)/n\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left((n+1)/n\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+1/n\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

Теорема 3. *(Признак Даламбера). Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *$a_n$ >0 и существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$ *Тогда при D < 1 ряд сходится; при D > 1 ряд расходится.*

Замечание 3. При D = 1 признак Даламбера не дает ответа, т.к. в этом случае существуют примеры как сходящихся, так и расходящихся рядов.

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!2^n}$

Решение.

$$a_n = \frac{n^n}{n!2^n},\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!2^{n+1}},$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!2^n}{(n+1)!2^{n+1} \cdot n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)n!}{(n+1)n! \cdot n^n} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1.$$

$D = \frac{e}{2} > 1$, то ряд расходится.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}.$$

Решение. $a_n = \frac{3^n}{n^5}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^5}$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot n^5}{(n+1)^5 \cdot 3^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^5 = 3 > 1.$$

Ряд расходится.

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично

70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «***Действия с комплексными числами».***

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

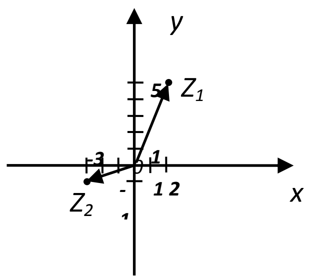
Задача 1. Изобразить комплексные числа на плоскости:

а) z = 2 + 5i б) z = -3 - i

Решение:

а) $Z = 2 + 5i \rightarrow Z_1(2;5)$

б) $Z = -3 - i \rightarrow Z_2(-3;-1)$



Задача 2. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + 6i$, $z_2 = 2 - 3i$

Найти:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (1 + 6i) + (2 - 3i) = 1 + 6) + 2 - 3i = (1 + 2) + (6i + (-3i)) = 3 + 3i$;

б) $z_1 - z_2 = (1 + 6i) - (2 - 3i) = 1 + 6i - 2 + 3i = (1 - 2) + (6i + 3i) = -1 + 9i$;

в) $z_1 z_2 = (1 + 6i) \cdot (2 - 3i) = 2 - 3i + 12i - 18i^2 = 2 + 9i - (-18) = 20 + 9i$

г) $\frac{z1}{z2} = \frac{1+6i}{2-3i} = \frac{(1+6i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+12i+18i^2}{4-9i^2} = \frac{2+15i-18}{4+9} = \frac{-16+15i}{13}$

Задача 3. Решите уравнение $x^2 + 4x + 29 = 0$;

Решение. Найдем дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$.

Так как a = 1, b = 4, c = 29, то $D = 4^2 - 4 \times 1 \times 29 = 16 - 116 = -100 < 0$.

$\sqrt{D} = \sqrt{-100} = \sqrt{(-1) * 100} = 10\sqrt{-1} = 10i$.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + 10i}{2} = -2 + 5i; \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - 10i}{2} = -2 - 5i$$

	$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$	Найти корни	Вычислить
Вариант 1	$z_1 = 2 - 3i$ $z_2 = i + 1$	$x^2 + 4x + 29 = 0$	$(1 + i) \cdot (1 - i) - (2 + 2i) + i^{22}$
Вариант 2	$z_1 = 4 - 11i$ $z_2 = 3i + 1$	$x^2 - 6x + 13 = 0$	$(5 + i) \cdot (3 - i) - (4 - i) + i^{26}$
Вариант 3	$z_1 = 5 + 3i$ $z_2 = -i + 1$	$x^2 - 2x + 5 = 0$	$(3 + i) \cdot (3 - i) - (6 + 4i) + i^{32}$
Вариант 4	$z_1 = 2 - 2i$ $z_2 = i - 4$	$x^2 - 3x + 8{,}5 = 0$	$(3 + 2i) \cdot (4 - i) - (5 - 2i) + i^{28}$
Вариант 5	$z_1 = 1 + 2i$ $z_2 = 2i - 1$	$5x^2 + 6x + 5 = 0$	$(2 + i) \cdot (3 - i) - (3 + 2i) + i^{54}$
Вариант 6	$z_1 = 3 - 3i$ $z_2 = 2i + 1$	$x^2 - 8x + 25 = 0$	$(3 - i) \cdot (7 - i) - (2 + 3i) + i^{44}$
Вариант 7	$z_1 = 3 + 3i$ $z_2 = i - 1$	$x^2 - 4x + 8 = 0$	$(13 + i) \cdot (3 - i) - (1 + i) + i^{52}$
Вариант 8	$z_1 = 5 - 3i$ $z_2 = 2i + 1$	$x^2 - 4x + 13 = 0$	$(3 + i) \cdot (7 - i) - (3 + 2i) + i^{36}$
Вариант 9	$z_1 = 2 - 4i$ $z_2 = i - 2$	$4x^2 - 24x + 37 = 0$	$(9 + i) \cdot (3 - i) - (3 + 5i) + i^{40}$
Вариант 10	$z_1 = 2 - 5i$ $z_2 = i + 10$	$x^2 - 2x + 10 = 0$	$(2 + i) \cdot (3 - i) - (5 + 2i) + i^{120}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «***комплексные числа***».

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

Комплексное число $z=a+bi$

Тогда длина этого вектора что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Пример 1: Записать числа в тригонометрической и показательной форме:

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z_2 = -1 + i$, $z_3=4$, $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $z_4=5i$, $z_5=-2-3i$

Решение

Запишем числа в тригонометрической и показательной форме:

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ имеем: $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2;$

число z_1 находится в 1 четверти, тогда $\varphi = arctg\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = arctg1 = \frac{\pi}{4}$

Имеем

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2) $z_2 = -1 + i$ имеем: $r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2};$ число z_2 находится в 2 четверти, тогда $\varphi = \pi + arctg\frac{1}{-1} = \pi - arctg1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$ Имеем

$$z_2 = -1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

3) $z_3 = 4 = 4 + 0 \cdot i$ имеем: $r = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4;$

число z_3 находится на положительной оси Ох, тогда

$\varphi = arctg\frac{0}{4} = arctg0 = 0.$

$$z_3 = 4 = 4(\cos 0 + i\sin 0) = 4e^{i0}$$

4) $z_4 = 5i = 0 + 5 \cdot i$ имеем: $r = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5;$

число z_4 находится на положительной оси Оу ,$\varphi = \frac{\pi}{2}$

Имеем

$$z_4 = 5i = 5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Пример 2.

Комплексное число записано в показательной форме $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$

Найдите его тригонометрическую и алгебраическую форму.

Решение $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

Итак, алгебраическая форма числа $z = \sqrt{3} + i$

<u>Арифметические действия с комплексными числами в тригонометрической форме</u>

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

Пример 3.

Вычислите $z_1 \cdot z_2$ $\frac{z_1}{z_2}$

$$z_1 = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}) \quad \text{и} \quad z_2 = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2})$$

Решение:

$$z_1\cdot z_2=(2\cdot 2)\cdot(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}))=4\cdot(\cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}),$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2}{2}\cdot(\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}))=(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right))$$

<u>Задание 1</u>

Вариант 1	Вариант 2
Задание 1. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической и показательной форме	
а) 3; б) -2i; в) 1 + i; г) $-1+i\sqrt{3}$	а)-4; б) i; в) 1- i; $-\sqrt{3}$ + i
Задание 2. Представить в алгебраической форме число	
$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2=3(\cos\pi+i\sin\pi)$.	$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
Задание 3. Найти произведение чисел $z_1\cdot z_2=$	
$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2=5\left(\cos(-\frac{3\pi}{4})+i\sin(-\frac{3\pi}{4})\right)$	$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2=5\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$
Задание 4. Найти частное чисел	
$z_1=5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение
Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:
Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «***Элементы комбинаторики».***

2.4. Время выполнения:
Выполнение _1_час _30_мин;

Комбинаторными задачами называются задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно сделать тот или иной выбор, выполнить какое-либо условие.

Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется **размещением из n элементов по k элементов:**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ где } n!=1*2*3*...*n$$

Пример. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

Решение. Число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т.е. равно A_7^4. Получаем $A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{3!*4*5*6*7}{3!} = 4*5*6*7 = 840$.

Размещения из n элементов по n элементов называются **перестановками из n элементов:**

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Пример. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение. Цифра 5 обязана стоять на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. 5!=5*4*3*2*1=120.

Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется **сочетанием из n элементов по k элементов:**

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Пример. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

Решение. Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т.е. их число равно

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{14!*15*16}{2!*14!} = \frac{15*16}{2} = 120$$

Свойства сочетаний:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad C_{n+k}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$$

Вариант 1.

1. Найти значения выражения

а). $C_n^3 = \frac{4}{15} C_{n+2}^4$; $2C_{x+2}^{x-2} = A_x^2$

б). $\frac{(x-4)!}{(x-2)!} = 3\frac{(x+2)!}{(x+3)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$C_{19}^5 + 2C_{19}^6 + C_{19}^7 =$...

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а).$(2x - y)^{10} =$

б).$T_8 =$?

Вариант 2.

1. Найти значения выражения

а). $8C_{2n+1}^{n+1} = 5C_{2n+2}^{n+2}$; $A_x^6 = 28A_{x-2}^5$

б). $\frac{(x+2)!}{(x+1)!} = \frac{(x+1)!}{(x+2)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$C_{14}^8 + 2C_{14}^9 + C_{14}^{10} =$...

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а).$(x - 2y)^8 =$

б).$T_5 =$?

Вариант 3.

1. Найти значения выражения

а). $2C_{n+5}^2 - 15C_n^1 = 75$; $\frac{A_x^4 + A_x^2}{A_x^2} = 13$

б). $\frac{2(x-5)!}{(x-4)!} = \frac{3(x+1)!}{(x+2)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$C_{41}^2 + 2C_{41}^3 + C_{41}^4 =$...

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а).$(7x - y)^8 =$

б).$T_4 = ?$

Вариант 4

1. Найти значения выражения

а). $13C_{2n}^{n+1} = 8_{2n+1}^{n-1}$; $\frac{A_9^3 + A_9^2}{P_8}$

б). $\frac{x!}{(x-2)!} = \frac{(x-1)!}{(x+1)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$C_{21}^7 + 2C_{21}^8 + C_{21}^9 =$...

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а).$(3x - 2y)^9 =$

б).$T_6 = ?$

Вариант 5.

1. Найти значения выражения

а). $5C_{2n}^{n-1} = 8C_{2n-1}^{n}$; $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$

б). $\frac{2(x-5)!}{(x-4)!} = 3\frac{(x+1)!}{(x+2)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$C_{11}^4 + 2C_{11}^5 + C_{11}^6 =$...

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а).$(3y + x)^{11} =$

б).$T_9 = ?$

Вариант 6.

1. Найти значения выражения

а). $7C_{2n-2}^{n-2} = 3C_{2n-1}^{n-1}$; $A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$

б). $\frac{x!}{(x-5)!} = \frac{30(x-2)!}{(x-6)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$C_{18}^3 + 2C_{18}^4 + C_{18}^5 =$...

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а).$(5x - y)^4 =$

б).$T_3 = ?$

Вариант 7.

1. Найти значения выражения

а). $20A_{n-2}^3 = A_n^5$; $C_x^2 = 66$

б). $\frac{x!}{(x-5)!} = \frac{20x!}{(x-3)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$C_{16}^3 + 2C_{16}^4 + C_{16}^5 =$...

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а).$(2x + 5y)^7 =$

б).$T_5 = ?$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «Формула Бернулли»**.**

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_час _30_мин;

Pn (x), видим наиболее вероятное число событий

Среди множества чисел k, k {0,1 ,… , n}, есть, по крайней мере, одно число k0, которому соответствует максимальная вероятность Pn(k).

Но рассмотрим другой вариант решения задачи с таким вопросом

Будем пользоваться специально для этого предназначенным двойным неравенством

$$np - q \le k_0 \le np + p ,$$

где p – вероятность наступления события A в одном опыте; q = 1– p.

Как пользоваться двойным неравенством

Прежде всего, отметим особенности этого неравенства:

значение правой части превышает значение левой ровно на единицу;

k_0 – целое число;

внутри диапазона значений [np–q ; np + p] может находиться только одно целое число, либо два целых числа могут находиться на его границах.

Определение k_0 осуществляют в следующей последовательности:

- ✓ сначала определяют величину np, если np – целое число, то k_0 = np;
- ✓ затем определяют величину np+p,
- ✓ если (np+p) –целое число, то существует два наивероятнейших числа: k_{01} = np + p и $k_{02} = k_{01} - 1$;
- ✓ если (np +p) – нецелое число, то k_0 – целое число в диапазоне [np– q; np + p].

Пример. Каково наивероятнейшее число лекций, посещенных студентом из n=17 запланированных в семестре, если вероятность посещения каждой лекции p=0,8?

Решение. Вычисляем np = 17·0,8 = 13,6 . Поскольку np – нецелое число, то согласно выше изложенной методике использования двойного неравенства вычисляем np+p = 13,6+0,8 = 14,4 . Поскольку np+p – нецелое число, то согласно той же методике k0 принадлежит диапазону [np-q; np+p], или равно целой части величины [13.6-0.2; 13.6+0.8], [13.4; 14.4], т.е. k_0 = 14 Ответ: 14

Пример. Каково наивероятнейшее число выпадения 6 очков в условиях эксперимента, если последний производится 11 раз?

Решение. По условию примера общее число опытов n = 11, вероятность наступления события (выпадение шести очков) $p = \frac{1}{6}$. Как и в предыдущем примере, в решении используем двойное неравенство. Сначала вычисляем: $np = 11 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$

Т.к np – нецелое число, вычисляем np + p = $\frac{11}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2$.

Поскольку np + p – целое число, то существуют два наивероятнейших числа: k_{01}= np + p = 2; k_{02} = np−q = $\frac{11}{6} - \frac{5}{6} = 1$ или k_{02} = $k_{01} - 1$= 1

Ответ: 1;2

Пример Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна - **0,7**. Куплено **42** билета. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов

Решение. Вычисляем np = 42·0,7 = 29,4. Поскольку np – нецелое число, то согласно выше изложенной методике использования двойного неравенства вычисляем np+p = 29,4+0,7 = 30,1 . Поскольку np+p – нецелое число, то согласно той же методике k_0 принадлежит диапазону [np-q; np+p], или равно целой части величины [29,4-0,3; 29,4+0.7], [29,7; 30,1], т.е. k_0 = 30

Ответ : 30

Пример.

Стрелок производит **5** выстрелов, вероятность попадания при из них равна **0,8**. Найти вероятность того, что:

1) Стрелок попадёт **3** раза
2) Стрелок попадёт не менее **3** раз.
3) Стрелок попадёт не более **2** раз.
4) Стрелок попадёт хотя бы один раз.

1) Найти вероятность того, что стрелок попадёт **3** раза

$$P_{5(3)} = C_5^3 \cdot p^3 \cdot g^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048$$

2) Найти вероятность того, что стрелок попадёт не менее **3** раз

$$P_{5(3)} + P_{5(4)} + P_{5(5)} = C_5^3 \cdot p^3 \cdot g^2 + C_5^4 \cdot p^4 \cdot g^1 + C_5^5 \cdot p^5 \cdot g^0 =$$

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + \frac{5!}{0! \cdot 5!} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}2048 + 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}942$$

3) Найти вероятность того, что стрелок попадёт не более 2 раз

$$P_{5(0)} + P_{5(1)} + P_{5(2)} = C_5^0 \cdot p^0 \cdot g^5 + C_5^1 \cdot p^1 \cdot g^4 + C_5^2 \cdot p^2 \cdot g^3 =$$

$$\frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot 0{,}8^0\cdot 0{,}2^5+\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 0{,}8^1\cdot 0{,}2^4+\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^3=0{,}00032+0{,}0064+0{,}0512=0{,}0579$$

4) Стрелок попадёт хотя бы один раз.

$$P_{5(1)}=1-0{,}00032=0{,}9997$$

Задача № 1

Стрелок производит n выстрелов, вероятность попадания при каждом из них равна **p**. Найти вероятность того, что:
1) Стрелок попадёт k раза
2) Стрелок попадёт не менее k раз.
3) Стрелок попадёт не более h раз.
4) Стрелок попадёт хотя бы один раз.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n	8	7	6	5	6	7	8	9	8	7	6	5	4	6
p	0.6	0.7	0.8	0.9	0.6	0.8	0.7	0.7	0.9	0.6	0.7	0.8	0.7	0.9
k	7	5	5	3	4	6	6	7	5	5	3	3	3	4
h	4	3	2	2	2	3	4	4	3	3	2	3	1	2

Задача №2

Вероятность того, что родившийся ребенок – мальчик, равна p. Какова вероятность того, что в семье из n детей k-девочки.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n	5	6	7	5	6	7	5	7	6	5	6	7	5	6
p	0.45	0.51	0.49	0.53	0.55	0.45	0.6	0.55	0.61	0.59	0.7	0.65	0.75	0.55
k	*2*	*4*	*3*	*3*	*4*	*4*	*3*	*4*	*5*	*2*	*5*	*3*	*3*	*4*

Задача № 3
Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна -p. Куплено n билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n	25	36	17	15	26	27	35	37	46	55	56	47	65	46
p	0.45	0.51	0.49	0.53	0.55	0.45	0.6	0.55	0.61	0.59	0.7	0.65	0.75	0.55

Задача № 4

Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно k, при заданной вероятности p?

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
k	12	16	13	24	18	18	19	17	22	21	25	37	45	34
p	0.45	0.51	0.49	0.53	0.55	0.45	0.6	0.55	0.61	0.59	0.7	0.65	0.75	0.55

.