

Санкт-Петербургское государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Академия промышленных технологий»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

**ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для специальности
среднего профессионального образования

08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения

Санкт-Петербург
2021

Методические рекомендации по выполнению практических и лабораторных работ предназначены для использования обучающимися при выполнении заданий по практическим и лабораторным работам по учебной дисциплине ЕН.01 Математика по специальности среднего профессионального образования 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения.

В методических рекомендациях предлагаются к выполнению практические работы, предусмотренные рабочей программой учебной дисциплины, даны рекомендации по их выполнению.

Организация-разработчик:

Санкт-Петербургское государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Академия промышленных технологий» (СПб ГБПОУ «АПТ»)

Разработчик:

Е.В. Никитина - преподаватель СПб ГБПОУ «АПТ»

Методические рекомендации рассмотрены и одобрены на заседании учебной цикловой комиссии естественнонаучных и общеобразовательных дисциплин.

Протокол №10 от 01.06.2021

Председатель УЦК Е.А. Рахаева

Методические рекомендации рассмотрены и одобрены на заседании Методического совета СПб ГБПОУ «АПТ» и рекомендованы к использованию в учебном процессе.

Протокол №1 от 31 августа 2021 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	3
2. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ И МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К НИМ.....	5

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ разработаны согласно рабочей программе учебной дисциплины ЕН.01 Математика и требованиям к результатам обучения Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования (далее – ФГОС СПО) по специальности 08.02.08 Монтаж и эксплуатация оборудования и систем газоснабжения.

Методические указания по выполнению практических работ направлены на овладение обучающимися следующих результатов:

Знания:

- значение математики в профессиональной деятельности
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, дискретной математики теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики
- основы интегрального и дифференциального исчисления

Умения:

- использовать методы линейной алгебры
- решать основные прикладные задачи

Общие компетенции

- ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
- ОК 02 Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности
- ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие
- ОК 04 Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами
- ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста
- ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей
- ОК 09 Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности
- ОК 11 Использовать знания по финансовой грамотности, планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере

Профессиональные компетенции

- ПК 1.1. Конструировать элементы систем газораспределения и газопотребления
- ПК 1.2. Выполнять расчет систем газораспределения и газопотребления
- ПК 1.3. Составлять спецификацию материалов и оборудования на системы газораспределения и газопотребления
- ПК 2.1. Организовывать и выполнять подготовку систем и объектов к строительству и монтажу
- ПК 2.2. Организовывать и выполнять работы по строительству и монтажу систем газораспределения и газопотребления в соответствии с правилами и нормами по охране труда, требованиями пожарной безопасности и охраны окружающей среды

- ПК 2.3. Организовывать и выполнять производственный контроль качества строительно-монтажных работ
- ПК 2.4. Выполнять пусконаладочные работы систем газораспределения и газопотребления
- ПК 2.5. Руководство другими работниками в рамках подразделения при выполнении работ по строительству и монтажу систем газораспределения и газопотребления
- ПК 3.1. Осуществлять контроль и диагностику параметров эксплуатационной пригодности систем газораспределения и газопотребления
- ПК 3.2. Осуществлять планирование работ, связанных с эксплуатацией и ремонтом систем газораспределения и газопотребления
- ПК 3.3. Организовывать производство работ по эксплуатации и ремонту систем газораспределения и газопотребления
- ПК 3.4. Осуществлять надзор и контроль за ремонтом и его качеством
- ПК 3.5. Осуществлять руководство другими работниками в рамках подразделения при выполнении работ по эксплуатации систем газораспределения и газопотребления
- ПК 3.6. Анализировать и контролировать процесс подачи газа низкого давления и соблюдения правил его потребления в системах газораспределения и газопотребления

Практические занятия проводятся после изучения соответствующих разделов и тем дисциплины. Выполнение обучающимися практических заданий позволяет им понять, где и когда изучаемые теоретические положения и практические умения могут быть использованы в будущей практической деятельности.

Целью практических занятий является закрепление теоретических знаний и приобретение практических умений и навыков.

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ И МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К НИМ

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1-2

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. **Контингент аттестуемых:** студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы

по теме 1.1. «*Действия с матрицами*»

по теме 1.2. «*Умножение матриц*»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1. Матрицы, действия над матрицами.

Определение. **Матрицей** размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица произвольных элементов a_{ij} , которая содержит m строк и n столбцов и обозначается следующим образом: $A=(a_{ij})$

П р и м е р. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица размера 2×3 , элементами которой являются

числа.

Если $m=n$, то матрица в этом случае называется **квадратной**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Элементы $a_{11}; a_{22} \dots a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы. Квадратная матрица, в которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю называется **диагональной**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определение. **Единичной** называется диагональная матрица, в которой все элементы главной диагонали будут равны единице. Единичную матрицу принято обозначать буквой E .

Пр и м е р. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица

Матрица размера $1 \times n$ называется **матрицей-строкой**, а матрица, размера $m \times 1$ называется **матрицей-столбцом**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \text{ - матрица - столбец} \qquad (a_{11} \ a_{12} \ a_{13}) \text{ - матрица-строка}$$

ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

1. Сумма матриц

Матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ можно складывать в том случае, если они будут иметь **одинаковый размер**.

Определение. **Суммой** двух матриц A и B , размера $m \times n$ называется матрица $C=A+B$, элементы которой определяются следующим образом: $C_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$,

Пр и м е р. $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$ Тогда $C=A+B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$

2. Определители и их свойства.

Определение. **Определителем второго порядка** называется квадратная таблица некоторых элементов $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ которой в соответствие однозначно ставится выражение $(ad - bc)$.

Если- a, b, c и d – произвольные числа, то определитель в конечном итоге будет выражаться также числом. Для однозначного определения местоположения элементов определителя вводится их двойная индексация. В общем виде элемент определителя, который стоит на пересечении i -ой строки и j -го столбца будет выражаться как a_{ij} .

Обозначается определитель символом $\Delta = |a_{ij}|$ -символическое выражение определителя в общем виде.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{– вычислительная схема определителя второго порядка в общем виде.}$$

Пример. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2) - (-5) \cdot 1 = -7$$

Ответ: -7

Определение. **Определителем третьего порядка** называется квадратная таблица некоторых элементов вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ которой в соответствие однозначно ставится выражение}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Пример. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение:

В данном примере числовые значения элементов следующие: $a_{11}=1$; $a_{12}=1$; $a_{13}=-1$; $a_{21}=2$; $a_{22}=1$; $a_{23}=-2$; $a_{31}=-1$; $a_{32}=1$; $a_{33}=2$. Подставляя эти значения в выражение определителя через его элементы, получим:

$$\Delta = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 = 2 + 2 - 2 - 1 - 4 + 2 = -1$$

Определение.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} в определителе Δ называется определитель, который получим после вычеркивания i -ой строки и j -го столбца в определителе Δ .

Пример. Найти все миноры определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение:

$M_{11}=1$ (вычеркиваем первую строку и первый столбец).

Аналогично $M_{12}=-3$, $M_{21}=2$, $M_{22}=6$.

Пример.

Найти миноры M_{11} ; M_{21} ; M_{32} и M_{13} в определителе $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Решение:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} в определителе Δ , называется минор этого элемента M_{ij} , взятый с соответствующим знаком, который определяется =В противном случае алгебраическое дополнение и минор элемента a_{ij} будут отличаться знаком.

Пример.

Найти все алгебраические дополнения элементов определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$M_{11} = A_{11} = 3 \quad M_{12} = -A_{11} = -2 \quad M_{21} = -A_{21} = -4 \quad M_{22} = A_{22} = 1$$

Пример.

Найти алгебраические дополнения элементов первой строки определителя и первого столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{21} = -M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Пример. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

с использованием различных его свойств.

Решение:

1. Вычислим определитель Δ , используя его определение:

$$\Delta = 1 \cdot (-2) \cdot (-3) + 2 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 3 \cdot 1 = -20.$$

2. Вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13};$$

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 18 - 5 = -20;$$

3. Вычислим определитель, разложив его по элементам второго столбца.:

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32};$$

$$\Delta = -2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 2 - 4 = -20;$$

4. Вычислим определитель Δ , предварительно преобразовав его с использованием седьмого свойства.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot 1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

К определителю $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$, который мы получили, заменив в исходном определителе

вторую строку суммой элементов первой и второй строки, применим пятое свойство, раскладывая его по элементам второй строки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -20.$$

Ответ: $\Delta = -20$.

Произведение матриц на число

Определение. **Произведением** матрицы A на число k называется матрица $B = kA$ такая, что $B = \|ka_{ij}\|$, т.е. чтобы умножить матрицу на число надо все ее элементы умножить на это число.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ Найти матрицу $B = -5A$.

Решение:

$$B = \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ -20 & 35 \end{pmatrix}.$$

Следствие. Если все элементы матрицы имеют общий множитель, то только в этом случае его можно выносить за знак матрицы.

Пример. $A = \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ -20 & 35 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

В случае же определителя - за знак определителя можно было выносить общий множитель элементов любой строки (столбца).

Произведение матриц

Матрицу A , слева, можно умножать на матрицу B , если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Определение. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m \times k$ на матрицу $B=(e_{st})$ размера $k \times n$ называется матрица $C=AB=(c_{it})$ размера $m \times n$ с элементами $c_{it} = a_{i1}e_{1t} + a_{i2}e_{2t} + \dots + a_{ik}e_{kt}$.

Таким образом, для определения элемента c_{it} матрицы $C=AB$, необходимо i -ю строку матрицы A поэлементно умножить на t -ый столбец матрицы B .

Пример. Найти произведение матриц $C = AB$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Матрица A имеет размер 2×4 , а матрица $B - 4 \times 3$. Поскольку число столбцов матрицы A равняется числу строк матрицы B , следовательно, матрицу A можно слева умножить на матрицу B . Пусть $AB=C$. Тогда:

$$c_{11} = a_{11}e_{11} + a_{12}e_{21} + a_{13}e_{31} + a_{14}e_{41} = 1(-1) + (-1)4 + 2 \cdot 2 + 1(-5) = -6;$$

$$c_{12} = a_{11}e_{12} + a_{12}e_{22} + a_{13}e_{32} + a_{14}e_{42} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 = -5;$$

$$c_{13} = a_{11}e_{13} + a_{12}e_{23} + a_{13}e_{33} + a_{14}e_{43} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 4;$$

$$c_{21} = a_{21}e_{11} + a_{22}e_{21} + a_{23}e_{31} + a_{24}e_{41} = 0(-1) + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 2(-5) = 30;$$

$$c_{22} = a_{21}e_{12} + a_{22}e_{22} + a_{23}e_{32} + a_{24}e_{42} = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-4) - 2 \cdot 1 = -18;$$

$$c_{23} = a_{21}e_{13} + a_{22}e_{23} + a_{23}e_{33} + a_{24}e_{43} = 0 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 27.$$

Таким образом, $c = AB = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 4 \\ 30 & -18 & 27 \end{pmatrix}$

Действия с матрицами подчиняются следующим свойствам:

$$A + B = B + A$$

$$K(A + B) = KA + KB \quad (K - \text{действительное число})$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(BC) = (AB)C$$

Примечание. Переместительный (коммутативный) закон для произведения матриц в общем случае не выполняется (если $AB = C$, то произведение BA может вообще не существовать).

Матрицы, для которых выполняется свойство $AB=BA$, называются **коммутативными**.

Определение. Матрица $A^T = \|a_{ij}\|$ называется **транспонированной** по отношению к матрице $A=\|a_{ij}\|$. Если матрица A имеет размер $m \times n$, то размер матрицы A^T будет $n \times m$.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Имеют место следующие равенства:

$$(A^T)^T = A;$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(KA)^T = KA^T;$$

$$(AB)^T = A^T B^T;$$

$$\Delta A = \Delta A^T;$$

$$\Delta(AB) = \Delta A \cdot \Delta B.$$

Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется **обратной** матрице A , если имеет место соотношение: $A^{-1}A = A A^{-1} = E$.

Если матрица имеет обратную матрицу A^{-1} , то она называется **обратимой**.

Квадратная матрица $A=(a_{ij})$, определитель ΔA которой отличный от нуля, является обратимой.

Обратная матрица в этом случае выражается соотношением: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \|A_{ji}\|$, где A_{ji} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A .

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Найти матрицу A^{-1} , обратную к матрице

A . Полученный результат проверить, определяя произведение $A^{-1}A = E$.

Решение:

Найдем определитель матрицы A .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -9 \\ 0 & -3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 50.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, матрица A является обратимой, т.е. существует обратная матрица A^{-1} .

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 12;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 26; \quad A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

Таким образом $A^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ 12 & 11 & 9 \\ 26 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ – матрица, обратная к матрице A . Найдем

произведение $A^{-1}A$.

$$\frac{1}{50} \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ 12 & 11 & 9 \\ 26 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Поскольку $A^{-1}A=E$, следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена правильно.

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ 12 & 11 & 9 \\ 26 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Составить матрицы (по вариантам). Найти их сумму и произведение. Самостоятельно выбрать всевозможные варианты.

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
1.	5	2	1	5	-3	0	1	2	-1	4	0	1	1	0	1	9
2.	2	-8	2	8	-2	0	1	3	-2	5	1	2	2	-3	2	6
3.	-3	-6	3	2	2	0	2	6	-6	3	2	5	3	-1	5	8
4.	0	1	8	9	-3	5	0	5	-3	2	3	2	5	-2	2	5
5.	1	0	5	3	4	-6	2	4	-4	1	5	5	6	0	3	6
6.	4	-2	2	4	6	0	3	8	-5	4	7	2	3	-1	6	7
7.	3	5	-7	0	-1	3	4	1	-5	5	1	4	4	0	9	6
8.	-4	3	8	0	2	-5	6	2	-5	6	2	3	1	0	5	4
9.	-1	1	-1	5	3	0	1	3	6	2	4	8	2	-1	4	3
10.	-2	4	-2	7	6	0	2	5	2	3	6	3	8	-5	1	5
11.	3	8	-3	1	-2	0	3	7	7	7	8	4	2	-1	2	7
12.	7	3	1	-3	0	6	1	1	1	0	2	1	5	-3	3	8
13.	5	-7	2	-2	0	4	2	6	3	-4	5	6	7	-1	5	5
14.	4	0	3	8	-2	5	3	3	0	-2	4	2	4	0	3	1
15.	3	-1	-7	5	0	2	5	9	4	-3	6	3	1	-4	7	2
16.	2	-1	-2	4	6	0	4	4	2	-2	9	1	2	8	4	9
17.	1	2	0	6	-4	3	3	0	4	-1	0	2	5	4	1	4
18.	0	4	0	7	-2	-1	5	4	6	-2	1	0	8	6	2	5
19.	0	3	7	-2	-1	-2	6	5	0	3	4	1	7	3	5	3
20.	-3	7	-3	4	0	4	7	2	0	1	2	1	4	5	6	2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$K^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \quad L^* = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} \quad N^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad Q^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \quad G^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1. «Решение систем уравнения метод Крамера»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин.

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Пусть имеется система n линейных уравнений с n неизвестными. Ее решение по формулам Крамера определяется следующим образом $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ где Δ - определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, а Δ_i - определитель, который отличается от определителя Δ тем, что в нем столбец коэффициентов при переменной x_i заменяется столбцом свободных членов. Рассмотрим возможные варианты решений системы линейных уравнений по формулам Крамера.

а) Если определитель $\Delta \neq 0$, система линейных уравнений будет совместной и определенной, т. е. имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера.

Пример. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение:

Вычисляем определители Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -15.$$

Поскольку $\Delta = -15 \neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 15;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -30.$$

Находим решение системы.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{15}{-15} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-30}{-15} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2$.

б) Если определитель Δ будет равен нулю, а хотя бы один из определителей $\Delta_i \neq 0$, то в этом случае система будет несовместной, т. е. не имеет решения.

Пример. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение:

Вычисляем определители Δ и Δ_i :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{этот результат можно было записать без}$$

вычислений, т. к. в определителе одинаковые первый и третий столбец.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = 9.$$

Поскольку $\Delta=0$, а $\Delta_1 \neq 0$, следовательно, система не имеет решения.

Ответ. Решения система не имеет.

в) Если определитель Δ и все определители Δ_i будут равны нулю, то система, если она будет совместной, имеет множество решений.

П р и м е р. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение:

Вычисляем определители Δ и Δ_i :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.к. первый и третий столбец в определителе одинаковые.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку определители Δ и Δ_i равны нулю, то система линейных уравнений будет неопределенной (в случае ее совместности). В определителе Δ находим минор второго порядка, который будет отличный от нуля. Таким, например, будет минор $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

Запишем систему двух линейных уравнений в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - x_3; \\ -x_1 + 2x_2 = -5 + x_3. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 - x_3 & 1 \\ -5 + x_3 & 2 \end{vmatrix} = 2(2 - x_3) - (-5 + x_3) = 9 - 3x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 - x_3 \\ -1 & -5 + x_3 \end{vmatrix} = (-5 + x_3) + (2 - x_3) = -3.$$

Найдем решение системы двух линейных уравнений с переменными x_1 и x_2 .

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9 - 3x_3}{3} = 3 - x_3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Решение системы линейных уравнений, которое содержит свободные переменные, называется **общим решением**. Таким образом, $x_1 = 3 - x_3$; $x_2 = -1$ – общее решение системы линейных уравнений. Придавая свободным переменным произвольные значения, мы будем получать различные частные решения исходной системы. Например, при $x_3 = 1$, частное решение будет следующим: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; при $x_3 = 2$, частное решение будет таким: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$. Таким образом, существует множество частных решений исходной системы.

Исходная система линейных уравнений будет иметь следующее базисное решение: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$. Проверка показывает, что это решение удовлетворяет всем трем уравнениям исходной системы, т. е. является ее решением.

Ответ: Система имеет множество решений.

Решение однородных систем линейных уравнений

Определение. Система линейных уравнений называется **однородной** если свободные члены этой системы будут все равны нулю.

Однородная система линейных уравнений всегда будет совместной, т. к. она имеет нулевое решение.

а) Решение однородной системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными

Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение системы определяется следующими соотношениями:

$$x_1 = t \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad x_2 = t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad x_3 = t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

где t – произвольное число.

Пример. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

$$x_1 = t \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -t; \quad x_2 = t \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4t; \quad x_3 = t \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5t.$$

Пусть $t = 1$, тогда $x_1 = -1$; $x_2 = -4$; $x_3 = 5$.

Ответ: Система неопределенная. Одно из частных решений: $x_1 = -1$; $x_2 = -4$; $x_3 = 5$.

б) Решение однородной системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases}$$

Данная система будет иметь ненулевые решения лишь в том случае, когда определитель системы будет равен нулю. Отбрасывая одно из уравнений, мы получим однородную систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными, методика решения которой уже разобрана ранее.

Пример. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Находим определитель Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Поскольку определитель Δ отличный от нуля, система имеет нулевое решение.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$.

Пример. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Находим определитель Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

Поскольку $\Delta=0$, то, следовательно, система имеет ненулевые решения. Отбрасывая третье уравнение, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем решение системы, используя методику решения однородной системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными.

$$x_1 = t \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2t; \quad x_2 = -t \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -t; \quad x_3 = t \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -t;$$

При $t=1$, получим решение: $x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = -1$.

Проверка показывает, что это решение удовлетворяет отброшенное третье уравнение и является решением исходной системы.

Ответ: Множество решений. Одно из частных решений: $x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = -1$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ 3x + 2y - 3z = 3 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

Вариант 2

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y - z = 6 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} -5x + 4y + 5z = -6 \\ -4x + 6y + 3z = -3 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x + y = 4 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$$

Вариант 5

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

Вариант 6

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -3 \\ -x - y + z = -2 \\ 3x + y - 2z = 6 \end{cases}$$

Вариант 7

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 2x - y + 6z = 7 \\ 4x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

Вариант 8

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 4 \\ 3x - 2y + z = -6 \\ 2x - z = 6 \end{cases}$$

Вариант 9

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} 3x - 8y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ -x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Вариант 10

Решить методом Крамера

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 4x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущий контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1. «Метод обратной матрицы»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

Решение систем линейных уравнений матричным способом

Пусть имеется система линейных уравнений:

Исходную систему линейных уравнений можно записать следующим образом: $AX=B$; отсюда матричное решение будет иметь вид: $X=A^{-1}B$.

Матричным способом можно решать систему линейных уравнений лишь в том случае, когда матрица из коэффициентов при неизвестных будет обратимой.

П р и м е р. Решить матричным способом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

Находим определитель Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, следовательно, матрица из коэффициентов при неизвестных будет обратимой и, следовательно, систему линейных уравнений можно решить матричным способом.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A .

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы линейных уравнений:

$$X = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ поскольку матрица $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ получим следующее решение: $x_1 = 1$; $x_2 =$

3 ; $x_3 = 0$.

Задания для самостоятельной работы

Вариант 1

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ 3x + 2y - 3z = 3 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

Вариант 2

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y - z = 6 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} -5x + 4y + 5z = -6 \\ -4x + 6y + 3z = -3 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x + y = 4 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$$

Вариант 5

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

Вариант 6

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -3 \\ -x - y + z = -2 \\ 3x + y - 2z = 6 \end{cases}$$

Вариант 7

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 2x - y + 6z = 7 \\ 4x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

Вариант 8

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 4 \\ 3x - 2y + z = -6 \\ 2x - z = 6 \end{cases}$$

Вариант 9

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x - 8y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ -x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Вариант 10

Решить с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 4x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1.
«Решение системы методом Гаусса»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

Вариант 1

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ 3x + 2y - 3z = 3 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$$

Вариант 2

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y - z = 6 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} -5x + 4y + 5z = -6 \\ -4x + 6y + 3z = -3 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x + y = 4 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$$

Вариант 5

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

Вариант 6

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -3 \\ -x - y + z = -2 \\ 3x + y - 2z = 6 \end{cases}$$

Вариант 7

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 8 \\ 2x - y + 6z = 7 \\ 4x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

Вариант 8

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 4 \\ 3x - 2y + z = -6 \\ 2x - z = 6 \end{cases}$$

Вариант 9

Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x - 8y - 3z = 4 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ -x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

Вариант 10

Решить методом Гаусса

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 4x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1. «Предел функции в точке»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

Определить точки разрыва функции и исследовать их характер.

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \leq 1, \\ 2^x, & x > 1. \end{cases}$$

Решение.

а) Функция $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ не определена в точке $x=1$, следовательно, она не является

непрерывной в этой точке. Так как

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2,$$

то $x=1$ - точка устранимого разрыва первого рода. Данную функцию можно доопределить по непрерывности при $x=1$, взяв за значение функции в этой точке величину односторонних пределов:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{если } x \neq 1 \\ 2, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

б) Функция $y = \frac{1}{x+1}$ определена и непрерывна на множестве $(-\infty, -1) \cup (-1, 1]$, так как в точке $x = -1$ знаменатель обращается в нуль. Вычислим односторонние пределы в точке $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x+1} = \left(\frac{1}{-0} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x+1} = \left(\frac{1}{+0} \right) = +\infty.$$

Так как оба односторонних предела в точке $x = -1$ бесконечны, то $x = -1$ является точкой разрыва второго рода.

Функция $y = 2^x$ при $x > 1$ определена и непрерывна. Функция $y = f(x)$ определена в точке $x = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$. Вычислим односторонние пределы в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^x = 2.$$

Односторонние пределы функция $y = f(x)$ в точке $x = 1$ конечны, но не равны между собой. Следовательно, точка $x = 1$ является точкой разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке равен $f(1+0) - f(1-0) = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Задание. Определить точки разрыва функции и исследовать характер точек разрыва:

1.1. а) $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$; б) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in \mathbb{R} \\ x+1, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

1.2. а) $f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$; б) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$

1.3. а) $f(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$; б) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}, & x > 2 \end{cases}$

1.4. а) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$; б) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ 2, & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$1.5. \text{ a) } f(x) = \frac{1-x}{x-x+1}; \text{ б) } f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| < 1 \\ 2, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$1.6. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{x} \arctan x; \text{ б) } f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

$$1.7. \text{ a) } f(x) = \sqrt{x} \arctan \frac{1}{x}; \text{ б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 3, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$1.8. \text{ a) } f(x) = \frac{1-2\cos x}{\pi-3x}; \text{ б) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$1.9. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{x-1-e^{1-x}}; \text{ б) } f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{x-1}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$1.10. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{3^{x-2}}; \text{ б) } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \leq 0 \\ \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1. «Предел функции в точке»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

Замечательные пределы.

$$a) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

$$b) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha = e \text{ или } \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\frac{1}{\alpha} = e$$

С учетом использования эквивалентных бесконечно малых функций, можно привести другие формы записи выражения первого замечательного предела:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin b\alpha}{c\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin b\alpha}{\sin c\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{b\alpha}{tg c\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{arctg b\alpha}{c\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{tg b\alpha}{\arcsin c\alpha} = \frac{b}{c}.$$

Для второго замечательного предела на практике целесообразно использовать соотношения:

$$1) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{b\alpha}\right)^{c\alpha \pm d} = e^{\frac{ac}{b}};$$

$$2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + a\alpha)^{\frac{b}{c\alpha} \pm d} = e^{\frac{ab}{c}}.$$

Пусть C - произвольная постоянная величина, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \infty$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{C} = 0; \quad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C}{f(x)} = \infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{C} = \infty; \quad 4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C}{F(x)} = 0;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = 0; \quad 6) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{f(x)} = \infty.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Решение:

Подставляя вместо переменной ее предельное значение и используя свойства пределов,

получим $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{1 - 4}{1 - 2} = 3$

Ответ: 3.

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1}$.

Решение:

Непосредственная подстановка предельного значения переменной в выражение функции под знаком предела приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Преобразуем функцию, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(2x-5)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-5}{x-1}.$$

Найдем предел функции после преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 5}{x - 1} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}.$$

Ответ: $\frac{7}{2}$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3}$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}.$$

$$\text{Но } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} = 0.$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{3+x}}{x-2}$

Решение:

Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ преобразуем функцию следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}}{x-2} &= \frac{(\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x})(\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x})}{(x-2)(\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x})} = \\ &= \frac{7-x-3-x}{(x-2)(\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x})} = \frac{2(2-x)}{(x-2)(\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x})} = -\frac{2}{\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x}} \end{aligned}$$

Найдем предел функции после преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{3+x}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{2}{\sqrt{7-x}+\sqrt{3+x}} = -\frac{2}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{x^2}$

Решение:

Непосредственная подстановка предельного значения в выражение функции под знаком предела приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ $\frac{1 - \cos 10x}{x^2} = \frac{2 \sin 5x}{x^2} = 2 \frac{\sin 5x}{x} \frac{\sin 5x}{x}$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$$

Пример. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x} \right)^{-5x}$

Решение:

Непосредственная подстановка предельного значения переменной в функцию под знаком предела приводит к неопределенности вида $1^{-\infty}$ воспользуемся выражением второго замечательного предела в виде: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bc} \right)^{cx \pm d} = e^{\frac{ac}{b}}$

$$\text{Получим: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x} \right)^{-5x} = e^{\frac{15}{2}}$$

$$\text{Ответ: } e^{\frac{15}{2}}$$

Можно получить более общее выражение для вычисления пределов такого типа:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax+b}{ax+c} \right)^{dx \pm k} = e^{\frac{d}{a}(b-c)} \text{ (справедливость этого соотношения доказать самостоятельно).}$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы функций

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x - 15};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}}{x^2 - 5x + 4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3)[\ln(x+2) - \ln x];$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\ln(1-3x)};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-3x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{7-5x} - \sqrt{3x-1}}.$$

Вычислить пределы функций

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 3x + 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{8-x}}{x^2 - 4x - 5};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -3} (7+2x)^{\frac{4}{x+3}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2)[\ln(x+5) - \ln x];$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{e^{-x^2}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{4x-3}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5x-9}}.$$

Вычислить пределы функций

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x-1}}{x^2 - 3x + 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + x \sin x}{\sin^2 x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{2x}{1-x}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (5x-3)[\ln(x+7) - \ln(x-1)];$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{e^{x^2} - 1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-2x} - \sqrt{6+x}}{\sqrt{4x+7} - \sqrt{2-x}}$$

Вычислить пределы функций

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 8};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{4x+1}}{x^2 - x - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-4)[\ln(2-3x) - \ln(5-3x)]; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}{x-1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-7x} - \sqrt{10-3x}}{\sqrt{4+x} - \sqrt{12+5x}}.$$

Вычислить пределы функций

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 10x + 21}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{6x-2}}{x^2 + x - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{3x}{x-2}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x-1)[\ln(3-2x) - \ln(7-2x)]; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\arcsin(4-x)}{\ln(x-3)};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-9} - \sqrt{6-x}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{10-x}}.$$

Вычислить пределы функций

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 3x - 4}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+3}}{x^2 + 2x - 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1} - 1}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\frac{2x}{x-1}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+3)[\ln(5-4x) - \ln(1-4x)]; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{7+3x} - \sqrt{3+x}}{\sqrt{6-x} - \sqrt{10+x}}.$$

Вычислить пределы функций

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 + x - 12}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{3x+2}}{x^2 + x - 6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1-5x^2)^{\frac{3}{x^2}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x)[\ln(1-x) - \ln(2-x)]; \quad 6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{\arcsin(x+2)};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{10+x}}{\sqrt{3-2x} - \sqrt{5-x}}.$$

Вычислить пределы функций

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{4x-6}}{x^2 - 2x - 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x)^{\frac{5}{x+7}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (5 + 2x)[\ln(3 - 2x) - \ln(5 - 2x)];$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^2(\pi - 3x)}{(3x - \pi)^2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4-3x} - \sqrt{5-4x}}{\sqrt{7x-3} - \sqrt{6-2x}}.$$

Вычислить пределы функций

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{9-x}}{x^2 + x - 6}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{\cos x - \cos^3 x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -4} (9 + 2x)^{\frac{6}{x+4}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - x)[\ln(7 - 3x) - \ln(2 - 3x)];$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln(x-4)}{\operatorname{arctg}(5-x)};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-4x} - \sqrt{8+x}}{\sqrt{4-x} - \sqrt{6+x}}.$$

Вычислить пределы функций

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 14x + 8}{2x^2 - 7x - 4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{2x-5}}{x^2 - 3x - 4};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 - \cos \frac{x}{3}}{x^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} (-3 - 2x)^{\frac{5}{x+2}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 5)[\ln(x + 3) - \ln x];$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{e^{3x} - 1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{2+2x}}{\sqrt{4x-1} - \sqrt{5+x}}.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.1. «Непрерывность функции»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

Определение. Функция называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если выполняется условие:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Пример. Исследовать функцию на непрерывность. Сделать чертеж.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x < -1 \\ x^2 + 1, & \text{если } -1 \leq x \leq 1. \\ 3x, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Решение:

1) Находим односторонние пределы в точке $x = -1$. Найдем левосторонний предел

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 3) = 2 \quad \text{Найдем правосторонний предел в точке } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 1) = 2$$

2) Поскольку односторонние пределы равны значению функции в точке $x = -1$, то в этой точке функция будет непрерывной.

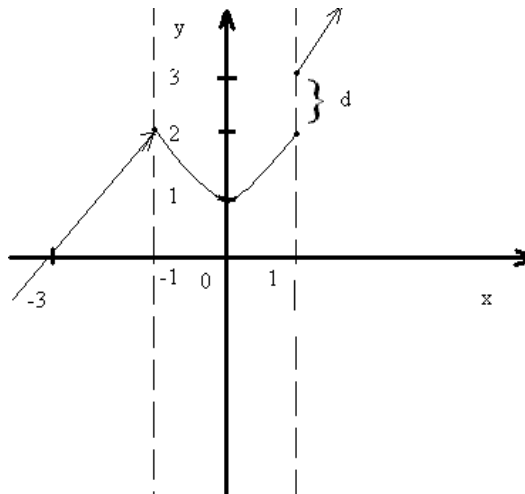
Находим односторонние пределы функции в точке $x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x) = 3$ Поскольку $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ функция в точке $x = 1$ будет иметь

разрыв. Так как односторонние пределы конечны, то разрыв функции в точке $x = 1$ будет

разрывом первого рода. В точке $x=1$ функция имеет скачок $d = \left| \lim_{x \rightarrow -1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right| = 3 - 2 = 1$.

Схематический чертеж.



Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию на непрерывность. Сделать схематический чертеж.

$$1. f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{если } x < -1, \\ x^2 + 2, & \text{если } -1 \leq x < 1, \\ 2x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x < -2, \\ x^2 + 2, & \text{если } -2 \leq x < 2, \\ 3x, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x < -1, \\ x^2 - 1, & \text{если } -1 \leq x < 2, \\ x + 1, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{если } x < 0, \\ x^2 - 2x + 2, & \text{если } 0 \leq x < 3, \\ 2x + 1, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{если } x < 0, \\ (x - 1)^2, & \text{если } 0 \leq x < 3, \\ 2x, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2 + 1, & \text{если } -1 < x \leq 1, \\ -x + 3, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & \text{если } 0 < x < 2, \\ x - 3, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x < -2, \\ x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ 2x, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ x + 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «Исследование функций»

2.4. Время выполнения:

Выполнение 1 час 30 мин;

Исследование функций с помощью производной и построение графиков

Цель: Овладение практическими навыками полного исследования функции и построения графиков функции.

Схема проведения полного исследования функции. Возрастание и убывание функции, нахождение участков её монотонности. Стационарные и критические точки функции. Локальные экстремумы функции, условия их существования и нахождение. Глобальные экстремумы функции на отрезке, их нахождение. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба, условия их существования и нахождение. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции, условия их существования и нахождение. Построение графика функции.

Пример выполнения задания.

Провести полное исследование функции

$$y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} \text{ и построить её график.}$$

Решение.

1) Находим область определения функции: $D(y) = \{x \in R \mid x^2 + 2x \neq 0\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) Поскольку данная функция является элементарной, то область её непрерывности является область определения $D(y)$, а точками разрыва являются точки $x = -2$ и $x = 0$, не принадлежащие множеству $D(y)$, но являющиеся предельными точками этого множества (точками в любой окрестности которых содержатся точки данного множества). Исследуем характер разрыва в точках $x = -2$ и $x = 0$ вычислив в них односторонние пределы функции:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = \frac{1}{(-2) \cdot (-0)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = \frac{1}{(-2) \cdot (+0)} = -\infty,$$
$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = \frac{1}{(-0) \cdot 2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = \frac{1}{(+0) \cdot 2} = +\infty.$$

Так как односторонние пределы функции в точках $x = -2$ $x = 0$ - бесконечные, то данные точки являются точками бесконечного разрыва.

3) Функция не является периодической.

Функция $y = f(x)$ в аналитическое выражение которой входит хотя бы одна непериодическая функция периодической не является.

Проверяем является ли функция чётной или нечётной. Так как область определения функции $D(y) = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$ не симметрична относительно точки $x = 0$, то данная функция - общего вида.

4) Находим точки пересечения графика с осями координат.

Так как $x = 0 \notin D(y)$ то точек пересечения графика с осью Oy нет

Положим $y = 0$ и решим уравнение $y = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = 0$ Его решением является $x = -1$.

Следовательно, точка $(-1, 0)$ - точка пересечения графика с осью Ox

5) Находим вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой, тогда и только тогда, когда x_0 является точкой бесконечного разрыва функции $y = f(x)$

Так как точки $x = -2$ $x = 0$ - точки бесконечного разрыва данной функции, то вертикальными асимптотами графика функции являются прямые $x = -2$ $x = 0$

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ тогда и

только тогда, когда одновременно существуют конечные пределы: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

Вычисляем сначала пределы при $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2 + 2x)x} = 0 = k_1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_1x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = 1 = b_1.$$

Следовательно, $y = k_1x + b_1 = 0 \cdot x + 1$ $y = 1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x \rightarrow -\infty$.

Аналогично вычисляем пределы при $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{(x^2 + 2x)x} = 0 = k_2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} = 1 = b_2$$

$y = k_2x + b_2 = 0 \cdot x + 1$ $y = 1$ - наклонная (горизонтальная) асимптота графика функции при $x \rightarrow +\infty$.

6) Определяем интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Для этого находим первую производную функции:

$$y' = \left(\frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x} \right)' = \frac{\left((x+1)^2 \right)' \cdot (x^2 + 2x) - (x+1)^2 (x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{2(x+1)(x^2 + 2x) - (x+1)^2(2x+2)}{(x^2 + 2x)^2} = -\frac{2(x+1)}{(x^2 + 2x)^2}$$

и определяем критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f'(x_i) = 0$ не существует:

$$y' = -\frac{2(x+1)}{(x^2 + 2x)^2} = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x = -1 \in D(y);$$

y' не существует при $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D(y)$ и $x = -2 \notin D(y)$.

Таким образом, единственной критической (стационарной) точкой функции $y = f(x)$ является точка $x_1 = -1$.

Исследуем знак производной $y' = f'(x)$ в интервалах, на которые критические точки функции $y = f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции. Результаты исследования представим следующей таблицей:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
y'	+	+	0	-	-
y	возрастает	возрастает	0	убывает	убывает

Так как при переходе слева направо через точку $x = -1$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», то точка $x = -1$ является точкой локального максимума и $y_{\max} = y(-1) = 0$.

7) Определяем интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Для этого находим вторую производную функции:

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2} \right)' = -2 \left(\frac{(x+1)'(x^2+2x)^2 - (x+1)((x^2+2x)^2)'}{(x^2+2x)^4} \right) =$$

$$= -2 \left(\frac{1 \cdot (x^2+2x)^2 - (x+1) \cdot 2 \cdot (x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x)^4} \right) = \frac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3}$$

и определяем точки возможного перегиба $y = f(x)$, т.е. точки $x_i \in D(y)$ в которых $f''(x_i) = 0$ или

$f''(x_i)$ не существует: $y'' = \frac{2(3x^2+6x+4)}{(x^2+2x)^3} \neq 0$, так как $3x^2+6x+4 \neq 0$ (квадратное уравнение не

имеет действительных корней); y'' не существует при $x^2+2x=0 \Rightarrow x=0 \notin D(y)$ и $x=-2 \notin D(y)$.

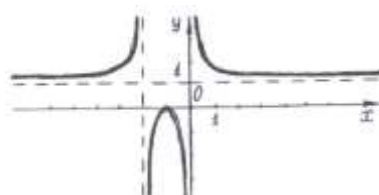
Таким образом, функция $y = f(x)$ не имеет точек возможного перегиба.

Исследуем знак второй производной $y'' = f''(x)$ в интервалах, на которые точки возможного перегиба функции $y = f(x)$ разбивают её область определения $D(y)$, и найдём интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции. Результаты исследования представим таблицей:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	+	-	+
y	график вогнутый	график выпуклый	график вогнутый

Точек перегиба нет.

8) На основании полученных результатов строим график функции



Задание. Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить её график.

- $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 54$
- $y = -4x^2 + 24x - 15$
- $y = x^3 + 6x^2$
- $y = 6x - x^3$
- $y = x^3 - 14x^2 + 60x - 72$
- $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 20$
- $y = x^4 - 2x^3 + 6x - 4$
- $y = -x^4 - 2x^3 + 12x^2 + 15x - 6$
- $y = 3x^5 - 10x^4 - 30x^3 + 12x + 7$
- $y = x^3 - x$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10-11

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «Интегрирование»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

Если данный интеграл с помощью алгебраических преобразований трудно или невозможно свести к одному или нескольким табличным интегралам, то для его отыскания применяют особые способы.

Способ подстановки (замены переменной).

Этот способ состоит в следующем.

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной.

Пример:

В интеграле $\int \sin x \cos x dx$ удобно произвести замену $t = \sin x$, так как оставшаяся часть подынтегрального выражения равна $\cos x dx = dt$.

Тогда данный интеграл можно переписать в виде:

$$\int \sin x \cos x dx = \int t dt$$

Найдём его $\int t dt = \frac{1}{2} t^2 + c$

Полученный интеграл табличный.

Произведя обратную замену $t = \sin x$, получаем ответ

$$\frac{1}{2} t^2 + c = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

Способ интегрирования по частям:

При интегрировании функций, содержащих произведения, логарифмы и обратные тригонометрические функции, бывает удобно воспользоваться формулой:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

С помощью данной формулы нахождение интеграла $\int u dv$ сводится к нахождению интеграла $\int v du$, который может оказаться проще данного или табличным.

При использовании формулы интегрирования по частям данное подынтегральное выражение представляют в виде произведения двух сомножителей, которые обозначают u и dv множитель и выбирают так, чтобы u' было проще, чем u .

При использовании формулы интегрирования по частям для нахождения интегралов от произведения нельзя дать общее правило для определения того, какой сомножитель в подынтегральном выражении следует обозначать через u и какой через dv . Ограничимся следующими рекомендациями:

При вычислении интегралов вида

$$\int P(x) \ln x dx, \quad \int P(x) \arcsin x dx, \quad \int P(x) \operatorname{arctg} x dx,$$

где $P(x)$ -многочлен, за функцию u принимается соответственно $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$.

При вычислении интегралов вида

$$\int P(x) e^{ax} dx, \quad \int P(x) \sin ax dx, \quad \int P(x) \cos ax dx, \quad a \neq 0$$

за u принимается многочлен $P(x)$.

Найти интегралы способом подстановки:

$$1) \int (x^3 + 4)^7 x^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \int t^7 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^7 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + c = \frac{t^8}{24} + c = \frac{(x^3 + 4)^8}{24} + c$$

$$2) \int x \cos 5x^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x^2 \\ dt = 10x dx \\ x dx = \frac{1}{10} dt \end{array} \right| = \int \cos t \cdot \frac{1}{10} dt = \frac{1}{10} \int \cos t dt = \frac{1}{10} \sin t + c = \frac{1}{10} \sin 5x^2 + c$$

$$3) \int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\arcsin^3 x}{3} + c$$

$$4) \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \\ t^2 = x+1 \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2t dt}{(t^2 - 1) \cdot t} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + c$$

Найти интегралы методом интегрирования по частям:

$$1) \int (3x - 2) \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x - 2 \quad dv = \cos x dx \\ du = 3 dx \quad v = \sin x \end{array} \right| = \\ = (3x - 2) \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 3 dx = (3x - 2) \sin x + 3 \cos x + c$$

$$2) \int \ln x (5x + 4) dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad dv = (5x + 4) dx \\ du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{5x^2}{2} + 4x \end{array} \right| = \left(\frac{5x^2}{2} + 4x \right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{5x^2}{2} + 4x \right) \cdot \frac{1}{x} dx = \\ = \left(\frac{5x^2}{2} + 4x \right) \ln x - \int \left(\frac{5x}{2} + 4 \right) dx = \left(\frac{5x^2}{2} + 4x \right) \ln x - \frac{5x^2}{4} - 4x + c$$

$$3) \int \arctg x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arctg x \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} \quad v = x \end{array} \right| = \arctg x \cdot x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Задание для самостоятельной работы

Вариант 1

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx;$$

$$\int x^3 \ln x dx.$$

Вариант 2

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx;$$

$$\int \frac{x^3 dx}{(x^4 + 1)^3};$$

$$\int (x-1)e^x dx.$$

Вариант 3

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\int x \arctg x dx.$$

Вариант 4

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int \frac{(x-4)(x+6)}{x^2} dx;$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}};$$

$$\int \ln(5x-1) dx$$

Вариант 5

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int \left(x^3 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{x^2-4} \right) dx;$$

$$\int \frac{e^{4x}}{5+2e^{4x}} dx;$$

$$\int \arctg 2x dx.$$

Вариант 6

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int \frac{x^3 + x \sin x}{x} dx;$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^3 - 1)^3};$$

$$\int \sqrt{x} \ln x dx.$$

Вариант 7

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int \left(e^x + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \right) dx;$$

$$\int x \cos(x^2 - 4) dx;$$

$$\int x \cdot 2^{-x} dx.$$

Вариант 8

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int \frac{x^2(x-2)}{x^3} dx \qquad \int \frac{dx}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}; \qquad \int x \cos 3x dx.$$

Вариант 9

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int \left(x^5 - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{x^2+16} \right) dx; \qquad \int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}; \qquad \int \ln 4x dx.$$

Вариант 10

Найти Неопределённые интегралы:

$$\int \frac{\sqrt{x+xe^x}}{x} dx; \qquad \int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos 3x-4}} dx; \qquad \int x \sin 4x dx.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «Интегрирование»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

Формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(x)_a^b = F(b) - F(a).$

Пример 1.

$$\int_{\pi}^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{\pi/2} = -(\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(\pi)) = -1$$

Пример 2

$$\int_1^4 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 = \left(\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{16-1}{2} = 7.5$$

Пример 3.

$$\int_0^2 (1-x)^2 dx = \left. \begin{array}{l} 1-x=t \\ dx=-dt \\ x=0 \Rightarrow t=1-0=1 \\ x=2 \Rightarrow t=1-2=-1 \end{array} \right| = -\int_1^{-1} t^2 dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

Пример 4

$$\int_0^{3\pi/2} \cos 2x dx = \left. \begin{array}{l} 2x=t \\ dx=\frac{1}{2} dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t=2 \cdot \frac{3\pi}{2} = 3\pi \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{3\pi} \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t \Big|_0^{3\pi} = \frac{1}{2} (\sin 3\pi - \sin 0) = 0$$

Вариант 1	$\int_0^3 (2x^2 - x + 4) dx$	$\int_1^e \ln^2 x dx$
Вариант 2	$\int_0^2 (4x^2 + x - 3) dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x - \sin x)^3} dx$
Вариант 3	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3};$	$\int_0^1 x e^{-x} dx$
Вариант 4	$\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx;$	$\int_0^1 \frac{x^3 + 1}{(x^4 + 4x + 2)^2} dx$
Вариант 5	$\int_2^3 (2x-1)^3 dx$	$\int_0^1 x e^{-x} dx$
Вариант 6	$\int_0^1 (3x+1)^4 dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$
Вариант 7	$\int_1^3 e^{2x} dx;$	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + x \cos x}{(x \sin x)^3} dx$

Вариант 8	$\int_1^3 5^{2x} dx;$	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2 \arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
-----------	-----------------------	--

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: *студенты 2курса.*

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. **«Площадь криволинейной трапеции».**

2.4. Время выполнения:

Выполнение 1 час 30 мин;

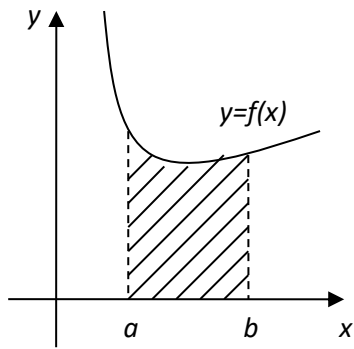
Процесс вычисления определённого интеграла виден из формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Правила вычисления площадей плоских фигур.

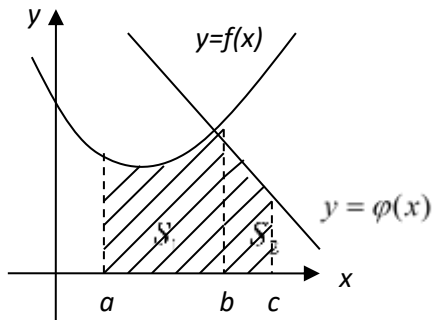
1) Площади фигур, расположенных над осью ОХ.

а)



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

б)



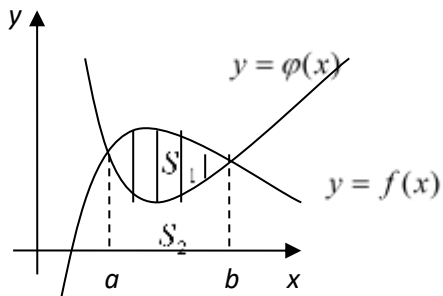
$$S_\phi = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx$$

$$S_2 = \int_b^c \varphi(x)dx$$

$$S_\phi = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c \varphi(x)dx$$

в)



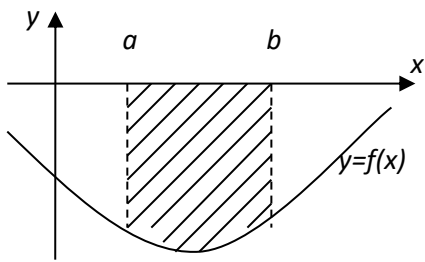
$$S_\phi = S_1 - S_2$$

$$S_1 = \int_a^b f(x)dx$$

$$S_2 = \int_a^b \varphi(x)dx$$

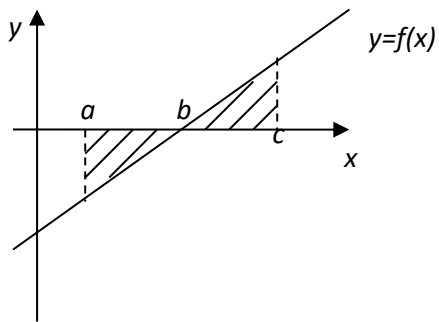
$$S_\phi = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx$$

2) Площади фигур, расположенных под осью OX.



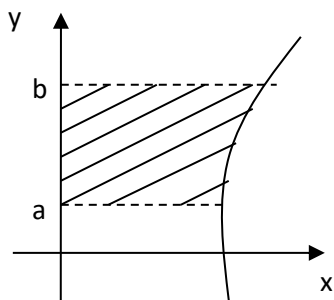
$$S \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

или $S = \int_b^a f(x) dx$



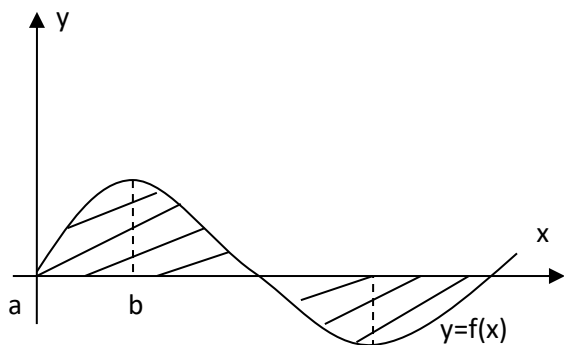
$$S = \int_b^a f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

3) Площади фигур, прилегающих к оси OY.



$$S = \int_a^b f(y) dy$$

Площадь симметричных фигур



$$S = n \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Образец решения практической работы.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

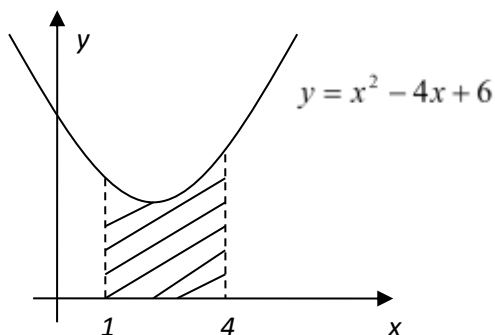
$$1) y = x^2 - 4x + 6; \quad x=1; \quad x=4; \quad y=0$$

Решение:

$y = x^2 - 4x + 6$ - график парабола, ветви направлены вверх.

$$\text{Вершина } x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_0 = y(x_0) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2$$



$x=1$ – прямая параллельная оси ОУ

$x=4$ – прямая параллельная оси ОУ

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 (x^2 - 4x + 6) dx = \left. \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x \right|_1^4 = \left(\frac{64}{3} - 32 + 24 \right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 6 \right) = \\ &= \frac{64}{3} - 8 - \frac{1}{3} - 4 = \frac{63}{3} - 12 = 21 - 12 = 9 \end{aligned}$$

Ответ: $S=9$ ед²

Вычислить площадь криволинейной трапеции

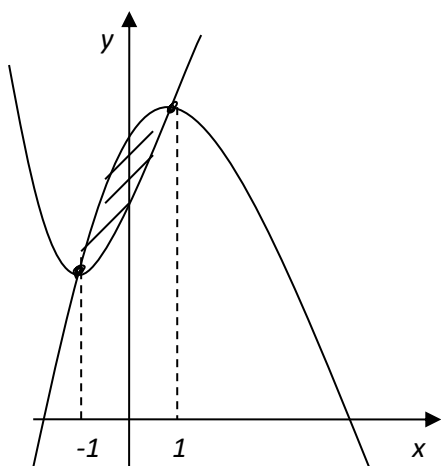
$$2) y = x^2 + 2x + 4 \qquad y = -x^2 + 2x + 6$$

Решение:

$y = x^2 + 2x + 4$ - график парабола, ветви направлены вверх.

$$\text{Вершина } x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y(-1) = 1 - 2 + 4 = 3$$



б) $y = -x^2 + 2x - 6$ - график парабола, ветви направлены вниз.

Вершина:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y(1) = -1 + 2 + 6 = 7$$

$$S_1 = \int_{-1}^1 (-x^2 + 2x + 6) dx = \left. -\frac{x^3}{3} + x^2 + 6x \right|_{-1}^1 = \left(-\frac{1}{3} + 1 + 6 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 6 \right) = -\frac{1}{3} + 7 - \frac{1}{3} + 5 = 12 - \frac{2}{3} = 11\frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 4) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x \right|_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + 1 + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 4 \right) = \frac{1}{3} + 5 + \frac{1}{3} + 3 = 8\frac{2}{3}$$

$$S_{\phi} = 11\frac{1}{3} - 8\frac{2}{3} = 10\frac{4}{3} - 8\frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Ответ $2\frac{2}{3}$ ед²

Вычислить площадь криволинейной трапеции

$$y = \sin x; \quad x = -\frac{\pi}{2}; \quad x = \pi; \quad y = 0$$

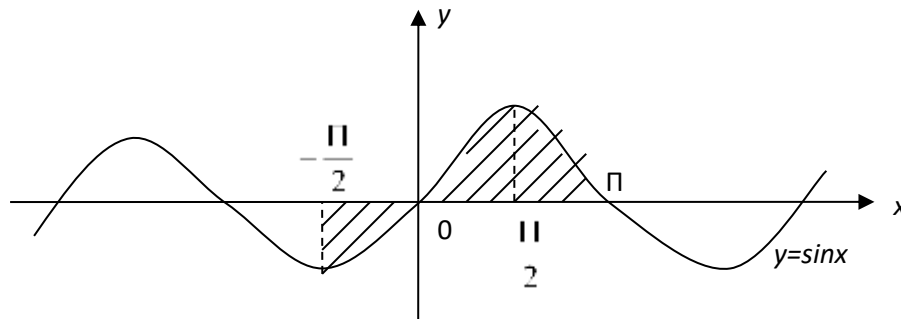
Решение:

$y = \sin x$ - синусоида.

$x = -\frac{\pi}{2}$ - прямая параллельная оси OY

$x = \pi$ - прямая, параллельная оси OY

$y = 0$ - ось OY



$$S = 3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3(-\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0)) = 3(0 + 1) = 3$$

Ответ: 3 ед²

Вычислить площадь криволинейной трапеции

4) $y = \frac{3}{x}$; $y = 2 + x$ $x = 3$; $x = -1$; $y = 0$

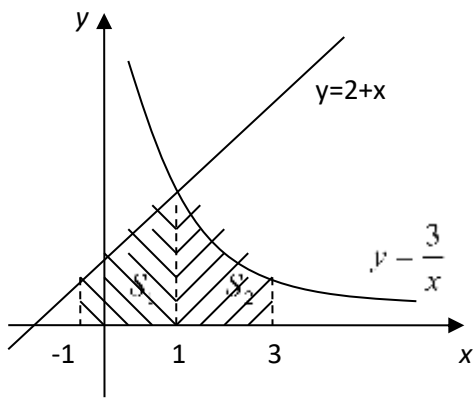
$y = \frac{3}{x}$ - гипербола

$y = 2 + x$ - прямая

$y = 0$ - ось OX

$x = 3$ - прямая, параллельная OY

$x = -1$ - прямая параллельная OY



$$S_1 = \int_{-1}^1 (2+x) dx = 2x + \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2}\right) = 4$$

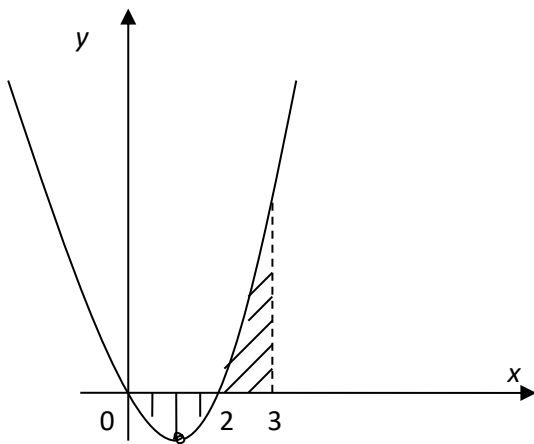
$$S_2 = \int_1^3 \frac{3}{x} dx = 3 \ln|x| \Big|_1^3 = 3 \ln 3 - 3 \ln 1 = 3 \ln 3 - 0 = 3 \ln 3$$

$$S = S_1 + S_2 = 4 + 3 \ln 3$$

Ответ: $4 + 3 \ln 3$ ед²

Вычислить площадь криволинейной трапеции

$$5) y = x^2 - 2x; \quad x=0 \quad x=3; \quad y=0$$



$y = x^2 - 2x$ - парабола, ветви направлены вверх.

Вершина:

$$x_0 = \frac{2}{2} = 1 \quad y(1) = -1$$

$x=0; x=3$ - прямые, параллельные ОУ

$y=0$ - ось ОХ

$$S_1 = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| = \left| \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_0^2 = \left| \left(\frac{8}{3} - 4 \right) - (0 - 0) \right| = \left| 2 \frac{2}{3} - 4 \right| = \left| -1 \frac{1}{3} \right| = 1 \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 \Big|_2^3 = (9 - 9) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = 0 - \left(-1 \frac{1}{3} \right) = 1 \frac{1}{3}$$

$$S = 1 \frac{1}{3} + 1 \frac{1}{3} = 2 \frac{2}{3} \text{ ед}^2$$

Ответ $2\frac{2}{3}$ ед²

Практическая работа.

1 вариант.

Вычислить определённые интегралы:

$$1) \int_{-3}^2 (3x^2 + 2x - 3) dx$$

$$2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$3) \int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^3}$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функций:

$$1) x^2 - 4x + 7 \quad y=0 \quad x=1 \quad x=3$$

$$2) y = -x^2 + 2x + 3 \quad y = x^2 - 2x + 3$$

$$3) y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad x=0 \quad x = \frac{4\pi}{3} \quad y=0$$

2 вариант.

Вычислить определённый интеграл.

$$1) \int_{-1}^1 (4x^3 - 3x^2 + 2) dx$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$3) \int_2^6 \sqrt{2x-3} dx$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

$$1) y = -x^2 + 4x \quad y=0 \quad x=1 \quad x=3$$

$$2) y = x^2 - 4x + 6 \quad y = 6 - x$$

$$3) y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad x=\pi; \quad y=0$$

3 вариант.

Вычислить определённый интеграл.

$$1) \int_{-2}^0 (5x^4 + 4x^3 - 7) dx$$

$$2) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3) \int_1^{\frac{4}{3}} (3x-2)^4 dx$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$1) y = -x^2 + 4 \quad y=0; \quad x=0; \quad x=2$$

$$2) x^2 + 4x + 5 \quad y=5-x; \quad x=-3$$

$$3) y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad x = -\frac{\pi}{2}; \quad x=\pi; \quad y=0$$

4 вариант.

Вычислить определённый интеграл.

$$1) \int_0^2 (4x^3 - 4 + 6x^2) dx$$

$$2) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$3) \int_{-1}^0 \frac{dx}{(2x+1)^2}$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$1) y = x^2 - 2x + 1 \quad y=0 \quad x=0; \quad x=3$$

$$2) y = -x^2 + 2x + 4 \quad y=4-x$$

$$3) y = \cos 2x \quad x = -\frac{\pi}{2}; \quad x=\pi; \quad y=0$$

5 вариант.

Вычислить определённый интеграл:

$$1) \int_{-2}^1 (4x - 5x^4 + 8x) dx$$

$$2) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx$$

$$3) \int_{\frac{2}{3}}^3 \sqrt[3]{3x-1} dx$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$1) y = -x^2 - 4x \quad y=0 \quad x=-3 \quad x=-1$$

$$2) y = x^2 + 6x + 11 \quad y=x+7$$

$$3) y = 2 \sin x \quad x = -\frac{\pi}{3} \quad x = \frac{\pi}{2} \quad y=0$$

6 вариант.

Вычислить определённый интеграл:

$$1) \int_{-3}^0 (2x^2 - 4x^3 + 6x) dx$$

$$2) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$3) \int_9^{11} (x-7)^3 dx$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

$$1) y = x^2 - 2x + 2 \quad y=0 \quad x=1 \quad x=3$$

$$2) y = x^2 + 4x + 5 \quad y=5$$

$$3) y = \cos \frac{1}{2} x \quad x=0 \quad x = \frac{3\pi}{2} \quad y=0$$

7 вариант.

Вычислить определённый интеграл.

$$1) \int_0^3 (4x - 3x^2 + 8x^3) dx$$

$$2) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{(2x-1)^5}$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

$$1) y = x^2 + 6x + 9 \quad y=0 \quad x=-1 \quad x=-3$$

$$2) y = x^2 + 2x \quad y = -x^2 + 4x$$

$$3) y = \sin 2x \quad x = -\frac{\pi}{2}; \quad x = \pi; \quad y = 0$$

8 вариант.

Вычислить определённый интеграл:

$$1) \int_{-1}^1 (6x^5 - 3x^2 + 4x) dx$$

$$2) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3) \int_5^{21} \sqrt[4]{(x-5)} dx$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

$$1) y = -x^2 + 2x + 3 \quad y=0 \quad x=-1 \quad x=2$$

$$2) y = -x^2 - 4x \quad y = -x$$

$$3) y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad x=0 \quad x = \frac{4\pi}{3}; \quad y=0$$

9 вариант.

Вычислить определённый интеграл.

$$1) \int_0^3 (3x^2 - 6x + 2) dx$$

$$2) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$3) \int_{-2}^{-1} (2x+6)^3 dx$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

$$1) y = x^2 + 2x + 4 \quad y = x - 2 \quad x = 1$$

$$2) y = x^2 - 2x + 1 \quad y = x + 1$$

$$3) y = \sin \frac{1}{2} x \quad x = 0 \quad x = \frac{3\pi}{2} \quad y = 0$$

10 вариант.

Вычислить определённый интеграл.

$$1) \int_{-1}^2 (4x^3 - 4x + 8) dx$$

$$2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx$$

$$3) \int_{-6}^{-2} (x+4)^3 dx$$

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

$$1) y = x^2 - 4x + 6 \quad y = 0 \quad x = 0 \quad x = 4$$

$$2) y = x^2 \quad y = 0 \quad y = x + 6$$

$$3) y = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad x = \pi; \quad y = 0$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично

70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «дифференциальные уравнения»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

Задание: Проверить подстановкой, что данная функция является общим решением (интегралом) данного дифференциального уравнения:

1.	$y = 3x + 1$; $xy' = y - 1$	4.	$y = 3x^3 - 2x$; $dy = (3x^2 - 2) dx$
2.	$y = x^2 + x + C$; $dy = (2x + 1)$	5.	$y = Ce^{2x}$; $y' = 2y$
3.	$y = \sqrt{x}$; $2yy' = 1$	6.	$y = Cx + 1$; $xy' = y - 1$

Задание: Найти общие решения дифференциальных уравнений методом разделения переменных:

7.	$\cos xy' = (1 + y) \sin x$	10.	$xy' - y = 0$
8.	$yy' + x = 0$	11.	$y' = \sin x$
9.	$y' = y$	12.	$x^2y' + y = 0$

Задание: Найти частные решения уравнений первого порядка, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

13.	$2y/\sqrt{x} = y$, $y_0 = 1$, при $x_0 = 4$	16.	$\frac{x dx}{y} - dy + \frac{dx}{4y} = 0$, $y \neq 0$, $y_0 = -5$, при $x_0 = 3$
14.	$x^2y + y^2 = 0$, $y_0 = 1$, при $x_0 = -4$	17.	$y' = \frac{y}{4x}$, $y_0 = -10$, при $x_0 = 16$
15.	$xy' = \frac{y}{\ln x}$, $y_0 = 1$, при $x_0 = e$	18.	$x^2 \frac{\partial y}{\partial x} = y$, $y_0 = 5$ при $x_0 = 0$

Задание: Решить линейные уравнения первого порядка:

19.	$y' - \frac{y}{x} = x$	22.	$y' + \frac{2y}{x} = x^3$
20.	$y' + x^2y = 2e^{-\frac{x^3}{3}}$	23.	$y' - y = e^x$
21.	$y' = x + y$	24.	$xy' + y = 3$

Задание: Найти частные решения однородных дифференциальных уравнений:

25.	$xdy - ydx = ydy$, если при $x = -1, y = 1$	28.	$(1 - x)dy - (y - 1)dx = 0$, если при $x = 2, y = 3$
26.	$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, если при $x = 1, y = -2$	29.	$2(x + 1)dy - ydx = 0$, если при $x = 1, y = 2$
27.	$(x + 3)dy - (y + 2)dx = 0$, если при $x = 2, y = 3$	30.	$(x^2 + 1)dy = 2xydx$, если при $x = 1, y = 2$

Пояснения к работе:

Необходимые формулы:

Алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка

$y' = f(x, y)$ с разделяющимися переменными

1. Рассмотрим производную y' как отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$
2. Перенесем dx в правую часть и разделим уравнение на $h(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot h(y), \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = p(x)dx$$
3. Разделим обе части уравнения на $h(y) \neq 0$
4. Запишем уравнение в форме:
 $q(y)dy = p(x)dx$
5. Проинтегрируем дифференциальное уравнение $\int q(y)dy = \int p(x)dx + C$
 где C – постоянная интегрирования.
6. Вычислим интегралы, получаем выражение $Q(y) = P(x) + C$

Пример 1

$$(1 + x)y' + y = 0$$

Решение: учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$

$$(1 + x)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$ydx + (1 + x)dy = 0$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{1 + x} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл:

$$\int \frac{dx}{1 + x} = \int \frac{dy}{y};$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(1 + x)}{1 + x} + C;$$

$$\ln|y| = \ln|1 + x| + \ln C;$$

$$\ln|y| = \ln|C \cdot (1 + x)|;$$

$$y = C(1 + x) - \text{общее решение диф. уравнения}$$

Пример

решения частного значения дифференциального уравнения

$$y' = x + 2; \quad y(0) = 1.$$

Решение: Приведем уравнение к виду (1) и разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = x + 2$$

$$dy = (x + 2)dx.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл

$$\int dy = \int (x + 2)dx;$$

$$\int dy = \int x dx + \int 2dx;$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 2x + C - \text{общее решение диф. уравнения.}$$

Т.к. $y(0) = 1$ то подставляя это начальное условие в общее решение диф. уравнения, найдем значение C :

$$y(0) = \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Значит частное решение данного диф. уравнения имеет вид:

$$y = \frac{x^2}{2} + 2x + 1.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «Задача Коши»

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

Пример. Найти частное решение уравнения:

$$\begin{cases} 2yy' = 1 - 3x^2; \\ y_0 = 3 \text{ при } x_0 = 0; \end{cases}$$

Решение: это уравнение с разделяющимися переменными. Представим его в

дифференциалах. Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$ получим $2y \frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$ Разделим переменные:

$$2y dy = (1 - 3x^2) dx$$

Интегрируя обе части последнего равенства, найдём $y^2 = x - x^3 + C$ Подставив начальные значения $x_0 = 0, y_0 = 3$,

найдем $C: 9 = 0 - 0 + C$, т.е. $C = 9$. Следовательно, искомым частным интегралом будет $y^2 = x - x^3 + 9$

2.1.4 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если $f(x, y) -$

однородная функция нулевого измерения. Его можно представить в виде

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (11)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Однородное дифференциальное уравнение приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = z \cdot x$

Где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример. Найти решение уравнения $(x^2 - 2y^2)dx + 2xydy = 0$

Решение: В данном уравнении функции $P(x,y) = x^2 - 2y^2$, $Q(x,y) = 2xy$ – однородные функции второго измерения, следовательно, данное уравнение является однородным. $y = z \cdot x$, $dy = zdx + xdz$ Подставляем эти выражения y и dy в данное уравнение: $x^2 dx - 2(zx)^2 dx + 2xz(x)(zdx + xdz) = 0$ $x^2 dx - 2x^2 z^2 dx + 2x^2 z^2 dx + 2x^3 z = 0$ $x^2(dx + 2xz) = 0$ или $dx + 2xzdz = 0$ Разделяем переменные (считая $x \neq 0$) $2zdz + \frac{dx}{x} = 0$.

Интегрируем почленно это уравнение (учитывая, что $z = z(x)$) $\int 2zdz + \int \frac{dx}{x} = C_1$

откуда $z^2 + \ln|x| = \ln|C|$ после потенцирования получим $x = Ce^{-z^2}$

Возвращаясь к прежней функции общий интеграл $x = Ce^{-\frac{y^2}{x^2}}$

Пример. Найти частное решение уравнения $\begin{cases} 2xyy' = x^2 + y^2 \\ y = 2, \text{ при } x = 1 \end{cases}$

Решение: запишем данное уравнение в виде $(x^2 + y^2)dx - 2xy dy = 0$. Легко можно убедиться в том, что оно однородно. Положим $y = zx$, откуда $dy = zdx + xdz$. Подставляя значения y и dy в уравнение, имеем (при $x \neq 0$, $1 - z^2 \neq 0$) :

$$(x^2 + z^2 x^2)dx - 2xz(x)(zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow (1 - z^2)dx = 2xzdz \Leftrightarrow \frac{2zdz}{1 - z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем $-\ln|1 - z^2| = \ln|x| - \ln|C|, C \neq 0$, или $\ln|x| + \ln|1 - z^2| = \ln|C|$,

откуда $x(1 - z^2) = C$, или $x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C$. Подставив в найденное решение начальные

условия, найдём $1\left(1 - \frac{2^2}{1^2}\right) = C$ и $C = -3$. Итак, искомое частное решение будет

$$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = -3, \text{ или } x^2 - y^2 + 3x = 0.$$

2.1.5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ -функции от x , называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка**. В частном случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами.

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$y = u \cdot v$$

где u и v - новые функции от x .

Пример. Найти общее решение уравнения: $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

Это линейное уравнение: здесь $f(x) = -2/(x+1)$, $\varphi(x) = -(x+1)^3$. Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставив теперь выражения для y и y' в данное уравнение, получим

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3;$$

или
$$u'v + u \left(v' - \frac{2v}{x+1} \right) = (x+1)^3$$

Так как одну из вспомогательных функций u или v можно выбрать произвольно, то в качестве v возьмем одно из частных решений уравнения

$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x+1} = 0$$

Разделив в этом уравнении переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}; \quad \int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x+1}; \quad \ln v = 2 \ln(x+1); \quad v = (x+1)^2$$

(произвольную постоянную C принимаем равной нулю, так как находим одно из частных решений). Подставим теперь выражение для v в уравнение (*); тогда получим

уравнение $u'v = (x+1)^2$; $\frac{du}{dx} \cdot (x+1)^2 = (x+1)^3$ или $\frac{du}{dx} = x+1$. Отсюда находим

$$\int du = \int (x+1)dx; \quad u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

Зная u и v , теперь получаем общее решение данного уравнения:

$$y = uv = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + C \right) (x+1)^2 = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$$

Пример. Найти частное решение уравнения $\begin{cases} \cos x dy + y \sin x dx = dx; \\ y = 1 \text{ при } x = 0 \end{cases}$

Решение: разделив все члены данного уравнения на $\cos x dx$, получим уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

которое является линейным. Положим $y = uv$; тогда $y' = u'v + uv'$

Подставив в выражение для y и y' в уравнение (*), имеем

$$u'v + uv' + uvtgx = \frac{1}{\cos x}$$

или

$$u'v + u(v' + vtgx) = \frac{1}{\cos x}$$

Для отыскания v получаем уравнение v

$$v' + vtgx = 0; \quad \frac{dv}{dx} = -vtgx; \quad \frac{dv}{v} = -tgx dx$$

откуда

$$\int \frac{dv}{v} = -\int tgx dx; \quad \ln v = \ln \cos x; \quad v = \cos x$$

Подставляя выражение для v в уравнение (*), имеем

$$u' \cos x = \frac{1}{\cos x}; \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \text{т.е.} \quad u = tgx + C$$

Следовательно, общее решение данного уравнения записывается так:

$$y = uv = (tgx + C) \cos x = \sin x + C \cos x$$

Используя начальные условия $y=1, x=0$, имеем

$$1 = \sin 0 + C \cos 0; \quad \text{т.е.} \quad C = 1$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = \sin x + \cos x$$

Задание для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $(x+1)y dx = dy$

2. Найти решение задачи Коши:
$$\begin{cases} x^2 dy = y^2 dx \\ y = 0,25 \text{ при } x = 0,1 \end{cases}$$

3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $(x+y)dy + ydx = 0$

4. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения
$$\begin{cases} (x-y)dx + xdy = 0 \\ y = 0 \text{ при } x = 1 \end{cases}$$

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$y' + 4\frac{y}{x} + x = 0$$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$y'(1-x^2) = xy+1, \quad y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $2xdx = 3y^2dy$

$$2. \text{Найти решение задачи Коши } \begin{cases} \frac{dy}{3x} - \frac{dx}{2y} = 0 \\ y = 5 \text{ при } x = 4 \end{cases}$$

3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения: $xydx - (x^2 + y^2)dy = 0$

4. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения $\begin{cases} xy^2y' = x^3 + y^3 \\ y = 3 \text{ при } x = 1 \end{cases}$

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения:

$$x^2y' + 2xy - 1 = 0$$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$y' + 3y = e^{2x}; y(0) = \frac{3}{5};$$

Вариант 3

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^3dy - y^3dx = 0$

$$2. \text{Найти решение задачи Коши } \begin{cases} y' = \frac{y}{2\sqrt{x}} \\ y = e^2 \text{ при } x = 9 \end{cases}$$

3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$;

4. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0 \\ y = 1, \text{ если } x = 1 \end{cases}$$

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y' - 7y = 8e^{3x}$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2, \quad y(3) = 40$$

Вариант 4

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = x^2 y - x^2$

2. Найти решение задачи Коши $\begin{cases} y' \sqrt{x} = 1 + y^2 \\ y = 0 \text{ при } x = 4 \end{cases}$

3. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения $x^3 y' = y(y^2 + x^2)$

4. Найти частное решение однородного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} x^2 y' = xy + y^2 \\ y = 1, \text{ если } x = 1 \end{cases}$$

5. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $(x^2 + 1)y' - xy = x^3 + x$

6. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения:

$$\frac{xdy}{dx} - y = x^2 \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2 курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «ряды».

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n.$$

Решение. Находим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Так как $C = \frac{1}{2} < 1$ то данный ряд сходится.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}.$$

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\arcsin^n \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1}{n} = \arcsin 0 = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\left((n+1)/n \right)^{n^2}}.$$

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{\left((n+1)/n \right)^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left((n+1)/n \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1+1/n \right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

Теорема 3. (Признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D \text{ Тогда при } D < 1 \text{ ряд сходится; при } D > 1 \text{ ряд расходится.}$$

Замечание 3. При $D = 1$ признак Даламбера не дает ответа, т.к. в этом случае существуют примеры как сходящихся, так и расходящихся рядов.

Пример. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!2^n}$

Решение.

$$a_n = \frac{n^n}{n!2^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!2^{n+1}},$$

$$\begin{aligned} D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!2^n}{(n+1)!2^{n+1} \cdot n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1)n!}{(n+1)n! \cdot n^n} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1. \end{aligned}$$

$D = \frac{e}{2} > 1$, то ряд расходится.

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}.$$

Решение. $a_n = \frac{3^n}{n^5}, a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^5}$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot n^5}{(n+1)^5 \cdot 3^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^5 = 3 > 1.$$

Ряд расходится.

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично

70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «Действия с комплексными числами».

2.4. Время выполнения:

Выполнение 1 час 30 мин;

Задача 1. Изобразить комплексные числа на плоскости:

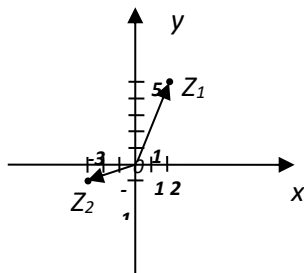
а) $z = 2 + 5i$

б) $z = -3 - i$

Решение:

а) $Z = 2 + 5i \rightarrow Z_1(2;5)$

б) $Z = -3 - i \rightarrow Z_2(-3;-1)$



Задача 2. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + 6i$, $z_2 = 2 - 3i$

Найти:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (1 + 6i) + (2 - 3i) = 1 + 6 + 2 - 3i = (1 + 2) + (6i + (-3i)) = 3 + 3i$;

б) $z_1 - z_2 = (1 + 6i) - (2 - 3i) = 1 + 6i - 2 + 3i = (1 - 2) + (6i + 3i) = -1 + 9i$;

в) $z_1 z_2 = (1 + 6i) \cdot (2 - 3i) = 2 - 3i + 12i - 18i^2 = 2 + 9i - (-18) = 20 + 9i$

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+6i}{2-3i} = \frac{(1+6i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+12i+18i^2}{4-9i^2} = \frac{2+15i-18}{4+9} = \frac{-16+15i}{13}$

Задача 3. Решите уравнение $x^2 + 4x + 29 = 0$;

Решение. Найдем дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$.

Так как $a = 1$, $b = 4$, $c = 29$, то $D = 4^2 - 4 \times 1 \times 29 = 16 - 116 = -100 < 0$.

$\sqrt{D} = \sqrt{-100} = \sqrt{(-1) * 100} = 10\sqrt{-1} = 10i$.

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + 10i}{2} = -2 + 5i$;

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - 10i}{2} = -2 - 5i$

	$z_1 + z_2; z_1 - z_2; z_1 \cdot z_2; \frac{z_1}{z_2}$	Найти корни	Вычислить
Вариант 1	$z_1 = 2 - 3i \quad z_2 = i + 1$	$x^2 + 4x + 29 = 0$	$(1 + i) \cdot (1 - i) - (2 + 2i) + i^{22}$
Вариант 2	$z_1 = 4 - 11i \quad z_2 = 3i + 1$	$x^2 - 6x + 13 = 0$	$(5 + i) \cdot (3 - i) - (4 - i) + i^{26}$
Вариант 3	$z_1 = 5 + 3i \quad z_2 = -i + 1$	$x^2 - 2x + 5 = 0$	$(3 + i) \cdot (3 - i) - (6 + 4i) + i^{32}$
Вариант 4	$z_1 = 2 - 2i \quad z_2 = i - 4$	$x^2 - 3x + 8,5 = 0$	$(3 + 2i) \cdot (4 - i) - (5 - 2i) + i^{28}$
Вариант 5	$z_1 = 1 + 2i \quad z_2 = 2i - 1$	$5x^2 + 6x + 5 = 0$	$(2 + i) \cdot (3 - i) - (3 + 2i) + i^{54}$
Вариант 6	$z_1 = 3 - 3i \quad z_2 = 2i + 1$	$x^2 - 8x + 25 = 0$	$(3 - i) \cdot (7 - i) - (2 + 3i) + i^{44}$
Вариант 7	$z_1 = 3 + 3i \quad z_2 = i - 1$	$x^2 - 4x + 8 = 0$	$(13 + i) \cdot (3 - i) - (1 + i) + i^{52}$
Вариант 8	$z_1 = 5 - 3i \quad z_2 = 2i + 1$	$x^2 - 4x + 13 = 0$	$(3 + i) \cdot (7 - i) - (3 + 2i) + i^{36}$
Вариант 9	$z_1 = 2 - 4i \quad z_2 = i - 2$	$4x^2 - 24x + 37 = 0$	$(9 + i) \cdot (3 - i) - (3 + 5i) + i^{40}$
Вариант 10	$z_1 = 2 - 5i \quad z_2 = i + 10$	$x^2 - 2x + 10 = 0$	$(2 + i) \cdot (3 - i) - (5 + 2i) + i^{120}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «*комплексные числа*».

2.4. Время выполнения:

Выполнение 1 час 30 мин;

Комплексное число $z=a+bi$

Тогда длина этого вектора что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Пример 1: Записать числа в тригонометрической и показательной форме:

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = 4, \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_5 = 5i, \quad z_6 = -2 - 3i$$

Решение

Запишем числа в тригонометрической и показательной форме:

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \text{ имеем: } r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2;$$

число z_1 находится в 1 четверти, тогда $\varphi = \arctg \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$

Имеем

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2) $z_2 = -1 + i$ имеем: $r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$; число z_2 находится в 2 четверти, тогда $\varphi = \pi + \arctg \frac{1}{-1} = \pi - \arctg 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Имеем

$$z_2 = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

3) $z_3 = 4 = 4 + 0 \cdot i$ имеем: $r = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$;

число z_3 находится на положительной оси Ox , тогда $\varphi = \arctg \frac{0}{4} = \arctg 0 = 0$.

$$z_3 = 4 = 4(\cos 0 + i \sin 0) = 4e^{i0}$$

4) $z_4 = 5i = 0 + 5 \cdot i$ имеем: $r = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$;

число z_4 находится на положительной оси Oy , $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Имеем

$$z_4 = 5i = 5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Пример 2.

Комплексное число записано в показательной форме $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$
Найдите его тригонометрическую и алгебраическую форму.

Решение

$$z = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

Итак, алгебраическая форма числа $z = \sqrt{3} + i$

Арифметические действия с комплексными числами в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Пример 3.

Вычислите $z_1 \cdot z_2$ $\frac{z_1}{z_2}$

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{и} \quad z_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot 2) \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \right) = 4 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6} \right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2} \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

Задание 1

Вариант 1	Вариант 2
Задание 1. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической и показательной форме	
а) 3; б) $-2i$; в) $1 + i$; г) $-1 + i\sqrt{3}$	а) -4 ; б) i ; в) $1 - i$; $-\sqrt{3} + i$
Задание 2. Представить в алгебраической форме число	
$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$ $z_2 = 3(\cos \pi + i \sin \pi).$	$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$ $z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$
Задание 3. Найти произведение чисел $z_1 \cdot z_2 =$	
$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$ $z_2 = 5 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$	$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$ $z_2 = 5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$
Задание 4. Найти частное чисел	
$z_1 = 5 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right),$ $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$	$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ $z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущий контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «Элементы комбинаторики».

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

Комбинаторными задачами называются задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно сделать тот или иной выбор, выполнить какое-либо условие.

Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется **размещением из n элементов по k элементов**:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ где } n! = 1*2*3*...*n$$

Пример. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

Решение. Число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т.е. равно A_7^4 .
Получаем $A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{3!*4*5*6*7}{3!} = 4*5*6*7 = 840$.

Размещения из n элементов по n элементов называются **перестановками из n элементов**:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Пример. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2,

3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение. Цифра 5 обязана стоять на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется **сочетанием из n элементов по k элементов**:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Пример. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

Решение. Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т.е. их число равно

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{14! \cdot 15 \cdot 16}{2! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$$

Свойства сочетаний:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad C_{n+k}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$$

Вариант 1.

1. Найти значения выражения

а). $C_n^3 = \frac{4}{15} C_{n+2}^4$; $2C_{x+2}^{x-2} = A_x^2$

б). $\frac{(x-4)!}{(x-2)!} = 3 \frac{(x+2)!}{(x+3)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$$C_{19}^5 + 2C_{19}^6 + C_{19}^7 = \dots$$

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а). $(2x - y)^{10} =$

б). $T_8 = ?$

Вариант 2.

1. Найти значения выражения

а). $8C_{2n+1}^{n+1} = 5C_{2n+2}^{n+2}$; $A_x^6 = 28A_{x-2}^5$

б). $\frac{(x+2)!}{(x+1)!} = \frac{(x+1)!}{(x+2)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$$C_{14}^8 + 2C_{14}^9 + C_{14}^{10} = \dots$$

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а). $(x - 2y)^8 =$

б). $T_5 = ?$

Вариант 3.

1. Найти значения выражения

а). $2C_{n+5}^2 - 15C_n^1 = 75$; $\frac{A_x^4 + A_x^2}{A_x^2} = 13$

б). $\frac{2(x-5)!}{(x-4)!} = \frac{3(x+1)!}{(x+2)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$$C_{41}^2 + 2C_{41}^3 + C_{41}^4 = \dots$$

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а). $(7x - y)^8 =$

б). $T_4 = ?$

Вариант 4

1. Найти значения выражения

а). $13C_{2n}^{n+1} = 8C_{2n+1}^{n-1}; \quad \frac{A_9^3 + A_9^2}{P_8}$

б). $\frac{x!}{(x-2)!} = \frac{(x-1)!}{(x+1)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$$C_{21}^7 + 2C_{21}^8 + C_{21}^9 = \dots$$

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а). $(3x - 2y)^9 =$

б). $T_6 = ?$

Вариант 5.

1. Найти значения выражения

а). $5C_{2n}^{n-1} = 8C_{2n-1}^n; \quad \frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$

б). $\frac{2(x-5)!}{(x-4)!} = 3 \frac{(x+1)!}{(x+2)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$$C_{11}^4 + 2C_{11}^5 + C_{11}^6 = \dots$$

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а). $(3y + x)^{11} =$

б). $T_9 = ?$

Вариант 6.

1. Найти значения выражения

а). $7C_{2n-2}^{n-2} = 3C_{2n-1}^{n-1}; \quad A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$

б). $\frac{x!}{(x-5)!} = \frac{30(x-2)!}{(x-6)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$$C_{18}^3 + 2C_{18}^4 + C_{18}^5 = \dots$$

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а). $(5x - y)^4 =$

б). $T_3 = ?$

Вариант 7.

1. Найти значения выражения

а). $20A_{n-2}^3 = A_n^5; \quad C_x^2 = 66$

б). $\frac{x!}{(x-5)!} = \frac{20x!}{(x-3)!}$

2. Вычислить, используя свойства сочетаний

$$C_{16}^3 + 2C_{16}^4 + C_{16}^5 = \dots$$

3. Разложить на множители и найти заданный член разложения

а). $(2x + 5y)^7 =$

б). $T_5 = ?$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20

2.0 Критерии оценки:

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка уровня подготовки	
	Балл (отметка)	Вербальный аналог
80 – 100%	5	Отлично
70 – 80%	4	Хорошо
60 – 70%	3	Удовлетворительно
менее 60%	2	Не удовлетворительно

2.1. Назначение

Требования к содержанию и оформлению вариантов оценочного средства практическая работа.

2.2. Контингент аттестуемых: студенты 2курса.

2.3. Форма и условия аттестации:

Текущих контроль проходит в виде выполнения заданий практической работы по теме 1.2. «Формула Бернулли».

2.4. Время выполнения:

Выполнение _1_ час _30_ мин;

$P_n(x)$, видим наиболее вероятное число событий

Среди множества чисел $k, k \in \{0, 1, \dots, n\}$, есть, по крайней мере, одно число k_0 , которому соответствует максимальная вероятность $P_n(k)$.

Но рассмотрим другой вариант решения задачи с таким вопросом

Будем пользоваться специально для этого предназначенным двойным неравенством

$$np - q \leq k_0 \leq np + p,$$

где p – вероятность наступления события A в одном опыте; $q = 1 - p$.

Как пользоваться двойным неравенством

Прежде всего, отметим особенности этого неравенства:

значение правой части превышает значение левой ровно на единицу;

k_0 – целое число;

внутри диапазона значений $[np - q; np + p]$ может находиться только одно целое число, либо два целых числа могут находиться на его границах.

Определение k_0 осуществляют в следующей последовательности:

- ✓ сначала определяют величину np , если np – целое число, то $k_0 = np$;
- ✓ затем определяют величину $np + p$,
- ✓ если $(np + p)$ – целое число, то существует два наивероятнейших числа:
 $k_{01} = np + p$ и $k_{02} = k_{01} - 1$;
- ✓ если $(np + p)$ – нецелое число, то k_0 – целое число в диапазоне $[np - q; np + p]$.

Пример. Каково наивероятнейшее число лекций, посещенных студентом из $n=17$ запланированных в семестре, если вероятность посещения каждой лекции $p=0,8$?

Решение. Вычисляем $np = 17 \cdot 0,8 = 13,6$. Поскольку np – нецелое число, то согласно выше изложенной методике использования двойного неравенства вычисляем $np+p = 13,6+0,8 = 14,4$. Поскольку $np+p$ – нецелое число, то согласно той же методике k_0 принадлежит диапазону $[np-q; np+p]$, или равно целой части величины $[13,6-0,2; 13,6+0,8]$, $[13,4; 14,4]$, т.е. $k_0 = 14$
Ответ: 14

Пример. Каково наивероятнейшее число выпадения 6 очков в условиях эксперимента, если последний производится 11 раз?

Решение. По условию примера общее число опытов $n = 11$, вероятность наступления события (выпадение шести очков) $p = \frac{1}{6}$. Как и в предыдущем примере, в решении

используем двойное неравенство. Сначала вычисляем: $np = 11 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$

Т.к. np – нецелое число, вычисляем $np + p = \frac{11}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2$.

Поскольку $np + p$ – целое число, то

существуют два наивероятнейших числа: $k_{01} = np + p = 2$; $k_{02} = np - q = \frac{11}{6} - \frac{5}{6} = 1$ или $k_{02} =$

$k_{01} - 1 = 1$

Ответ: 1;2

Пример Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна - **0,7**. Куплено **42** билета. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов

Решение. Вычисляем $np = 42 \cdot 0,7 = 29,4$. Поскольку np – нецелое число, то согласно выше изложенной методике использования двойного неравенства вычисляем $np+p = 29,4+0,7 = 30,1$. Поскольку $np+p$ – нецелое число, то согласно той же методике k_0 принадлежит диапазону $[np-q; np+p]$, или равно целой части величины $[29,4-0,3; 29,4+0,7]$, $[29,7; 30,1]$, т.е. $k_0 = 30$
Ответ : 30

Пример.

Стрелок производит **5** выстрелов, вероятность попадания при из них равна **0,8**. Найти вероятность того, что:

- 1) Стрелок попадет **3** раза
- 2) Стрелок попадет не менее **3** раз.
- 3) Стрелок попадет не более **2** раз.
- 4) Стрелок попадет хотя бы один раз.

- 1) Найти вероятность того, что стрелок попадет **3** раза

$$P_{5(3)} = C_5^3 \cdot p^3 \cdot g^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 0,2048$$

- 2) Найти вероятность того, что стрелок попадет не менее **3** раз

$$P_{5(3)} + P_{5(4)} + P_{5(5)} = C_5^3 \cdot p^3 \cdot g^2 + C_5^4 \cdot p^4 \cdot g^1 + C_5^5 \cdot p^5 \cdot g^0 =$$

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 + \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^1 + \frac{5!}{0! \cdot 5!} \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^0 = 0,2048 + 0,4096 + 0,32768 = 0,942$$

- 3) Найти вероятность того, что стрелок попадет не более **2** раз

$$P_{5(0)} + P_{5(1)} + P_{5(2)} = C_5^0 \cdot p^0 \cdot g^5 + C_5^1 \cdot p^1 \cdot g^4 + C_5^2 \cdot p^2 \cdot g^3 =$$

$$\frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^5 + \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^4 + \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,00032 + 0,0064 + 0,0512$$

$$= 0,0579$$

4) Стрелок попадёт хотя бы один раз.

$$P_{5(1)} = 1 - 0,00032 = 0,9997$$

Задача № 1

Стрелок производит n выстрелов, вероятность попадания при каждом из них равна p . Найти вероятность того, что:

- 1) Стрелок попадёт k раз
- 2) Стрелок попадёт не менее k раз.
- 3) Стрелок попадёт не более h раз.
- 4) Стрелок попадёт хотя бы один раз.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n	8	7	6	5	6	7	8	9	8	7	6	5	4	6
p	0.6	0.7	0.8	0.9	0.6	0.8	0.7	0.7	0.9	0.6	0.7	0.8	0.7	0.9
k	7	5	5	3	4	6	6	7	5	5	3	3	3	4
h	4	3	2	2	2	3	4	4	3	3	2	3	1	2

Задача №2

Вероятность того, что родившийся ребенок – мальчик, равна p . Какова вероятность того, что в семье из n детей k -девочки.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n	5	6	7	5	6	7	5	7	6	5	6	7	5	6
p	0.45	0.51	0.49	0.53	0.55	0.45	0.6	0.55	0.61	0.59	0.7	0.65	0.75	0.55
k	2	4	3	3	4	4	3	4	5	2	5	3	3	4

Задача № 3

Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна p . Куплено n билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
n	25	36	17	15	26	27	35	37	46	55	56	47	65	46
p	0.45	0.51	0.49	0.53	0.55	0.45	0.6	0.55	0.61	0.59	0.7	0.65	0.75	0.55

Задача № 4

Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно k , при заданной вероятности p ?

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
k	12	16	13	24	18	18	19	17	22	21	25	37	45	34
p	0.45	0.51	0.49	0.53	0.55	0.45	0.6	0.55	0.61	0.59	0.7	0.65	0.75	0.55